

12 Berechenbarkeit und Aufwandsabschätzung

12.1 Berechenbarkeit

Frage: Gibt es für jede Funktion, die mathematisch spezifiziert werden kann, ein Programm, das diese Funktion berechnet?

Antwort: Nein! [Turing 1937]

Hier: Informelle Argumentation

Definition: Eine Funktion, die programmiert werden kann, heißt *berechenbar*.

Zwei Funktionen

Betrachte

```
(: return-seven ( -> real))
```

```
(define return-seven
```

```
  (lambda ()
```

```
    7))
```

```
(: loop-forever ( -> %X))
```

```
(define loop-forever
```

```
  (lambda ()
```

```
    (loop-forever)))
```

Für die Berechnungsprozesse gilt

- (return-seven) => 7
terminiert und liefert das Ergebnis 7
- (loop-forever) => (loop-forever) => ...
terminiert nicht

Das Halteproblem

Definition Sei `(: halts? ((-> %X) -> boolean))` definiert durch

- `(halts? f) => #t`, falls der Berechnungsprozess `(f)` terminiert, und
- `(halts? f) => #f`, falls `(f)` *nicht* terminiert.

Beispiel Für eine Implementierung von `halts?` soll gelten:

- `(halts? return-seven)` liefert `#t`
- `(halts? loop-forever)` liefert `#f`

Die Goldbach-Vermutung

- Vermutung: Jede gerade Zahl $n > 4$ ist Summe zweier Primzahlen.
Goldbach 1742, bisher unbewiesen
- Funktion `goldbach` hält an, falls die Goldbach-Vermutung falsch ist.

```
; goldbach : -> string
(define goldbach
  (lambda ()
    (letrec ((test
              (lambda (n)
                (if (sum-of-two-primes? n)
                    (test (+ n 2))
                    "Goldbach-Vermutung ist falsch."))))
      (test 6))))
```

- `(halts? goldbach)` würde die Goldbach-Vermutung beweisen oder verwerfen.

halts? ist nicht berechenbar

- Angenommen, halts? kann (z.B. in Scheme) programmiert werden. Dann ist auch die folgende Funktion programmierbar:

```
(: debunk-halts? (-> real))  
(define debunk-halts?  
  (lambda ()  
    (if (halts? debunk-halts?)  
        (loop-forever)  
        42)))
```

- Was ist der Wert von (halts? debunk-halts?)?

– Angenommen, der Wert ist #t. Dann ist

```
(debutk-halts?)
```

=>

```
(if (halts? debunk-halts?)
```

```
  (loop-forever)
```

```
  42)
```

=> *nach Annahme*

```
(if #t
```

```
  (loop-forever)
```

```
  42)
```

=>

```
(loop-forever)
```

Da der Berechnungsprozess nicht terminiert, ergibt sich ein Widerspruch zur Definition von halts?.

- Was ist der Wert von (halts? debunk-halts?)?

– Angenommen, der Wert ist #f. Dann ist

```
(debutk-halts?)
```

=>

```
(if (halts? debunk-halts?)
```

```
  (loop-forever)
```

```
  42)
```

=> *nach Annahme*

```
(if #f
```

```
  (loop-forever)
```

```
  42)
```

=>

```
42
```

Jetzt terminiert der Berechnungsprozess und liefert einen Widerspruch zur Definition von halts?.

- Also muss die Annahme, dass halt's? programmierbar ist, falsch sein!
- Mehr dazu in Informatik III

12.2 Aufwandsabschätzung

Motivation

Nicht nur das Ergebnis einer Berechnung ist interessant, sondern auch ihre Laufzeit.

- Maß für die Laufzeit: Wieviele Berechnungsschritte werden ausgeführt?
- Wann ist eine Implementierung eines ADT besser als eine alternative Implementierung?

Exakte Bestimmung der Laufzeit meist nicht sinnvoll.

Stattdessen: Aufwandsabschätzung als Funktion von der Größe der Eingabe.

Drei Möglichkeiten hierzu:

- Laufzeit im besten Fall (*best case*)
- Laufzeit im durchschnittlichen Fall (*average case*)
- Laufzeit im schlimmsten Fall (*worst case*)

Hier: Worst case.

Ein Beispiel

Frage: Wie hoch ist der Aufwand, um mittels `btree-member?` festzustellen, ob ein Element in einem Suchbaum vorhanden ist?

Maß für den Aufwand: Anzahl der rekursiven Aufrufe.

Antwort: Um festzustellen, ob ein Element in einem Suchbaum mit Tiefe n vorhanden ist, benötigt man höchstens $n + 1$ rekursive Aufrufe.

Zur Erinnerung:

```
; Feststellen, ob Element im Suchbaum vorhanden ist
(: btree-member? (real btree -> boolean))
(define btree-member?
  (lambda (elem st)
    (letrec ((member?
              (lambda (t)
                (cond
                 ((empty-tree? t)
                  #f)
                 ((node? t)
                  (cond
                   ((= elem (node-label t))
                    #t)
                   ((< elem (node-label t))
                    (member? (node-left t)))
                   (else
                     (member? (node-right t))))))))))
      (member? st))))))
```

Zur Erinnerung:

```
; Berechnet die Tiefe eines Binärbaums
(: btree-depth (btree -> natural))
(define btree-depth
  (lambda (t)
    (cond
      ((empty-tree? t)
       0)
      ((node? t)
       (+ 1
          (max (btree-depth (node-left t))
                (btree-depth (node-right t))))))))))
```

Behauptung: Im Berechnungsprozess für `(member? t)` ist die Anzahl n der Aufrufe von `member?` höchstens `(btree-depth t) + 1`.

Beweis durch Termination.

[Induktionsbasis] Nullstellige Symbole: $t = \text{the-empty-tree}$

`(member? the-empty-tree) => #f`, also $n = 1$.

Da `(btree-depth the-empty-tree) => 0` und $n = 1 \leq 1 = 0 + 1$ gilt die Behauptung.

[Induktionsschritt] Angenommen, die Induktionsbehauptung gilt für t_1 und t_2 .

Zeige: Die Behauptung gilt auch für `(make-node t1 y t2)` mit beliebigem y .

Für den ersten Aufruf von `member?` gilt:

`(member? (make-node t1 y t2))`

\Rightarrow

`(cond`

`((= elem y) #t)`

`((< elem y) (member? (node-left (make-node t1 y t2))))`

`(else (member? (node-right (make-node t1 y t2))))`

Drei Fälle: (= elem y), (< elem y), else

1. Falls (= elem y), so ist

$$\begin{aligned} & n \\ &= 1 \\ &\leq 1 + (\max (\text{btree-depth } t_1) (\text{btree-depth } t_2)) \\ &= (\text{btree-depth } (\text{make-node } t_1 \text{ y } t_2)) \end{aligned}$$

2. Falls (`< elem y`), so setzt sich der Berechnungsprozess wie folgt fort:

`(member? (node-left (make-node t1 y t2)))`

=>

`(member? t1)`

Setze nun $n' =$ Anzahl der Aufrufe von `member?` im Berechnungsprozess von `(member? t1)`. Dann ist

$$\begin{aligned} & n \\ = & 1 + n' \\ \leq & \quad \{ \text{nach Induktionsvoraussetzung} \} \\ & 1 + (\text{btree-depth } t_1) + 1 \\ \leq & \quad \{ \text{Definition von Maximum} \} \\ & 1 + 1 + (\max (\text{btree-depth } t_1) (\text{btree-depth } t_2)) \\ = & 1 + (\text{btree-depth } (\text{make-node } t_1 \text{ y } t_2)) \end{aligned}$$

3. Der dritte Fall ist analog zu beweisen.

q.e.d.

12.3 Sortieren von Listen

```
(: list-sort ((%X %X -> bool) (list %X) -> (list %X)))
```

Erklärung: `(list-sort leq l)` liefert eine Liste mit den gleichen Elementen wie `l`, aber aufsteigend gemäß der kleiner-gleich Relation `leq` sortiert.

Beispiele:

```
(list-sort <= (list 32 16 8))      ; == (list 8 16 32)
(list-sort string<=? empty)      ; == empty
```

Muster:

```
(define list-sort
  (lambda (leq l)
    (cond
      ((empty? l)
       ...)
      ((pair? l)
       (... (first l) ... (list-sort leq (rest l)) ...))))))
```


Bemerkung:

- Es ist nicht sofort klar, wie aus dem Listenkopf und der sortierten Restliste eine sortierte Liste konstruiert werden kann.

⇒ Überlasse dies einer **Hilfsdefinition** `list-insert`.

- Anforderungen an `(list-insert leq x l)`: konstruiert aus einer kleiner-gleich Relation `leq`, einer Zahl und einer aufsteigend sortierten Liste eine aufsteigend sortierte Liste, die sowohl `x` als auch sämtliche Elemente von `l` enthält. Zum Vergleich der Listenelemente wird `leq` benutzt.

Definition:

```
(define list-sort
  (lambda (leq l)
    (cond
      ((empty? l)
       empty)
      ((pair? l)
       (list-insert leq (first l) (list-sort leq (rest l)))))))
```

Hilfsdefinition: list-insert

```
(: list-insert ((%X %X -> boolean) %X (list %X) -> (list %X)))
```

Erklärung: (list-insert leq x l) konstruiert aus einer kleiner-gleich Relation leq, einer Zahl x und einer aufsteigend sortierten Liste l eine aufsteigend sortierte Liste, die sowohl x als auch sämtliche Elemente von l enthält. Zum Vergleich der Listenelemente wird leq benutzt.

Beispiele:

```
(list-insert < 17 (list 8 16 32)) ; == (list 8 16 17 32)  
(list-insert < 4711 empty)       ; == (list 4711)
```

Definition:

```
(define list-insert
  (lambda (leq x l)
    (cond
      ((empty? l)
       (list x))
      ((pair? l)
       (let ((head (first l)))
         (if (leq x head)
             (make-pair x l)
             (make-pair head (list-insert leq x (rest l))))))))))
```

Bemerkung: *Sortieren durch Einfügen*, insertion sort

Beispiel für list-sort

```
(list-sort (list 32 16 8))
=> (list-insert (first (list 32 16 8)) (list-sort (rest (list 32 16 8))))
=> (list-insert 32 (list-sort (list 16 8)))
=> (list-insert 32 (list-insert (first (list 16 8)) (list-sort (rest (list 16 8)))))
=> (list-insert 32 (list-insert 16 (list-sort (list 8))))
=> (list-insert 32 (list-insert 16 (list-insert (first (list 8)) (list-sort (rest (list 8)))))
=> (list-insert 32 (list-insert 16 (list-insert 8 (list-sort empty))))
=> (list-insert 32 (list-insert 16 (list-insert 8 empty)))
=> (list-insert 32 (list-insert 16 (list 8)))
=> (list-insert 32 (make-pair 8 (list-insert 16 empty)))
=> (list-insert 32 (make-pair 8 (list 16)))
=> (list-insert 32 (list 8 16))
=> (make-pair 8 (list-insert 32 (list 16)))
=> (make-pair 8 (make-pair 16 (list-insert 32 empty)))
=> (make-pair 8 (make-pair 16 (list 32)))
=> (list 8 16 32)
```

Aufwandsabschätzung für list-sort

Sinnvolles Maß: Anzahl der ausgeführten Vergleichsoperationen.

Vorgehen:

- Ermittle obere Schranke für die Anzahl der in `list-insert` ausgeführten Vergleichsoperationen.
- Berechne damit eine obere Schranke für die Anzahl der in `list-sort` ausgeführten Vergleichsoperationen.

Definition: Sei $\mathcal{V}_i(l)$ die Anzahl der Vergleichsoperationen `leq`, die bei einem Aufruf `(list-insert leq x l)` ausgeführt werden. Dabei sind `leq` und `x` beliebig aber fix.

Behauptung: Es gilt: $\mathcal{V}_i(l) \leq (\text{length } l)$.

Beweis durch Listeninduktion.

[Induktionsbasis] $l = \text{empty}$.

`(list-insert leq x empty) => (list x)` und es wird keine Vergleich ausgeführt. Also $\mathcal{V}_i(l) = 0 \leq (\text{length empty})$.

[Induktionsschritt] Angenommen, die Induktionsbehauptung gilt für eine Liste l' .

Zeige: Die Behauptung gilt auch für $l = (\text{make-pair } y \ l')$ für beliebiges `y`.

Für den ersten Aufruf von `list-insert` gilt:

```
(list-insert leq x (make-pair y l'))
=> (let ((head (first (make-pair y l'))))
      (if (leq x head)
          (make-pair x (make-pair y l'))
          (make-pair head (list-insert leq x (rest (make-pair y l'))))))))
```

=>

```
(if (leq x y)
    (make-pair x (make-pair y l'))
    (make-pair y (list-insert leq x l')))
```

Es wird also mindestens eine Vergleichsoperation ausgeführt.

Fallunterscheidung:

- $(\text{leq } x \ y) \Rightarrow \#t$

Dann werden keine weiteren Vergleichsoperation ausgeführt.

Also: $\mathcal{V}_i(l) = 1 \leq (\text{length } l) = 1 + (\text{length } l')$

- $(\text{leq } x \ y) \Rightarrow \#f$

Dann gilt: $\mathcal{V}_i(l) = 1 + \mathcal{V}_i(l') \stackrel{IV}{\leq} 1 + (\text{length } l') = (\text{length } l)$

q.e.d.

Bemerkung: Die obere Schranke wird realisiert, d.h. es gibt leq , y und l mit $\mathcal{V}_i(l) = (\text{length } l)$.

Beispiel: `(list-insert <= 4 (list 1 2 3))`

Definition: Sei $\mathcal{V}_s(l)$ die Anzahl der Vergleichsoperationen `leq`, die bei einem Aufruf `(list-sort leq l)` ausgeführt werden. Dabei ist `leq` beliebig aber `fix`.

Behauptung: Es gilt: $\mathcal{V}_s(l) \leq \frac{n}{2}(n - 1)$, wobei $n = (\text{length } l)$.

Beweis durch Listeninduktion.

[Induktionsbasis] $l = \text{empty}$.

`(list-sort leq empty)` \Rightarrow `empty` und es wird kein Vergleich ausgeführt.

Also $\mathcal{V}_s(l) = 0 \leq 0 = \frac{(\text{length } l)}{2}((\text{length } l) - 1)$.

[Induktionsschritt] Angenommen, die Induktionsbehauptung gilt für eine Liste l' .

Zeige: Die Behauptung gilt auch für $l = (\text{make-pair } y \ l')$ für beliebiges y .

Für den ersten Aufruf von `list-sort` gilt:

`(list-sort leq l)`

\Rightarrow `(list-insert leq`

`(first (make-pair y l'))`

`(list-sort leq (rest (make-pair y l'))))`)

\Rightarrow `(list-insert leq y (list-sort leq l'))`

Betrachte

`(list-insert leq y (list-sort leq l'))`

Lemma: Für alle Listen l'' gilt: $(\text{length } l'') = (\text{length } (\text{list-sort leq } l''))$

Beweis: Übung.

Insbesondere gilt also:

$$\mathcal{V}_i(\text{(list-sort leq } l')) \leq (\text{length } (\text{list-sort leq } l')) = (\text{length } l')$$

Damit ergibt sich mit $n = (\text{length } l)$ und $n' = (\text{length } l') = n - 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_s(l) &= \mathcal{V}_i(\text{(list-sort leq } l')) + \mathcal{V}_s(l') \leq n' + \mathcal{V}_s(l') \\ &\stackrel{\text{IV}}{\leq} n' + \frac{n'}{2}(n' - 1) = \frac{n'^2 + n'}{2} = \frac{(n-1)^2 + n-1}{2} = \frac{n}{2}(n-1) \end{aligned}$$

q.e.d

Bemerkung: Die obere Schranke wird realisiert, d.h. es gibt l mit $(\text{length } l) = n$ und $\mathcal{V}_s(l) = \frac{n}{2}(n-1)$. Beispiel: `(list-sort <= (list 32 16 8))`

12.4 Zusammenfassung

- Es gibt mathematisch definierbare Funktionen, die nicht programmiert werden können.
- Aufwandsabschätzungen für funktionale Programme können mit Hilfe von Induktionsbeweisen über die Eingabe durchgeführt werden.
- Die Suche eines Elements in einem binären Suchbaum der Tiefe n benötigt höchstens $n + 1$ rekursive Aufrufe (linear).
- Das Sortieren einer Liste der Länge n durch Einfügen benötigt höchstens $(n^2 - n)/2$ Vergleichsoperationen (quadratisch).
- Beide Abschätzungen gehen vom schlimmstmöglichen Fall (*worst case*) aus.