8 Terme

8.1

Ein Term ist eine Liste von Zeichen mit innerer Struktur

- lineare Darstellung eines Baums
- Syntax einer Programmiersprache
- Semantik von Sprachen
- Prototyp für alle zusammengesetzten, gemischten und rekursiven Datentypen

Bsp

$(2 \cdot 11) - 1$

$x^2 - 2xy + y^2$

$a \wedge (\neg b \vee c)$

8.1 Def (Rangalphabet)

Ein <u>Rangalphabet</u> Σ ist eine Menge von Symbolen (Operationssymbole) mit einer Funktion $\sigma : \Sigma \to \mathbb{N}$, die jedem Symbol eine <u>Stelligkeit</u> zuordnet.

<u>Bsp</u> Arithmetik

$$\Omega = \{ 0^{(0)}, 1^{(0)}, pred^{(1)}, succ^{(1)}, +^{(2)}, -^{(2)}, \cdot^{(2)}, /^{(2)} \}$$

Konvention: $f^{(k)}$ falls $\sigma(f) = k$, $\Sigma^{(k)}$ Symbole mit Stelligkeit k

Aussagenlogik

$$\Lambda = \{ F^{(0)}, T^{(0)}, \neg^{(1)}, \wedge^{(2)}, \vee^{(2)} \}$$

Binärbäume (ohne Elemente)

$$B = \{ E^{(0)}, N^{(2)} \}$$

8.2 <u>Def</u> (Terme)

Sei X eine Menge von Variablen, Σ ein Rangalphabet $\Sigma \cap X = \emptyset$

Die Menge $T_\Sigma(X)$ der Terme über Σ mit Variablen X

ist induktiv definiert durch

(i) $X \subseteq T_\Sigma(X)$ „jede Variable ist ein Term"

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, für alle $f^{(n)} \in \Sigma$,

wenn $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)$

dann auch $(f\ t_1 \ldots t_n) \in T_\Sigma(X)$

Bsp $T_\Omega(\{x,y\})$

0 x y

(succ 0) (pred x)

(+ x y) (* x (succ 0))

$T_\wedge(\{a,b,c\})$

T F a

(¬ F) (¬ c)

(∧ (¬ b) c)

$T_B(\emptyset)$

E

(N E E)

(N (N E E) E)

(N (N E E) (N E E))

8.3 Termdarstellungen

Bsp $(\vee\ (\neg\ (\wedge\ a\ (\vee\ b\ c)))\ (\vee\ a\ b)) \in T_{\Lambda}(\{a,b,c\})$

– Polnische Notation (Präfixnotation) eindeutig lesbar

$\underline{\vee}\,[\neg\,[\wedge\,[a]\,[\vee\,[b]\,[c]]]]\,[\vee\,a\,b]$

– Präfix mit Klammern (siehe Def)

– Präfix mit Klammern (Alternative

$\vee(\neg(\wedge(a, \vee(b,c))), \vee(a,b))$

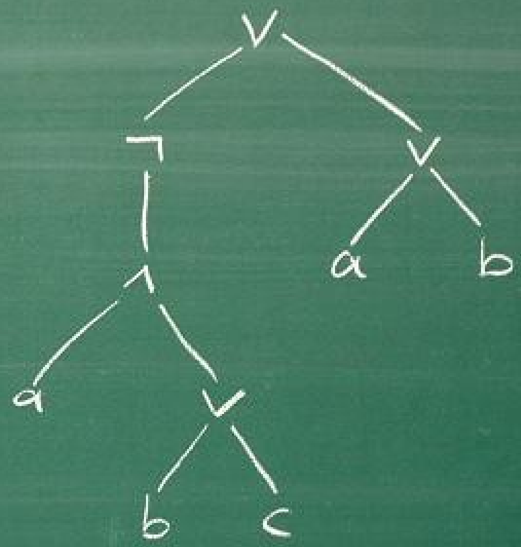
– Zweistellige Op. in Infixnotation

$\neg(a \wedge (b \vee c)) \vee (a \vee b)$

– Umgekehrte Polnische Notation (Suffixnotation)

$a\ b\ c\ \vee\ \wedge\ \neg\ a\ b\ \vee\ \vee$

– Graphische Notation



8.4 Terminduktion, strukturelle Induktion

Zum Nachweis einer Eigenschaft $P(t)$ für alle $t \in T_\Sigma(X)$ reicht es zu zeigen

Induktionsbasis

(i) $(\forall x \in X)\ P(x)$

(ii) „Induktionsschritt"

$$(\forall n)\,(\forall f^{(n)} \in \Sigma)\,\Big(\forall t_1 \ldots t_n \in T_\Sigma(X)$$

$$P(t_1) \overset{\text{und}}{,} \ldots \overset{\text{und}}{,} P(t_n) \Longrightarrow P(f\, t_1 \ldots t_n)\Big)$$

Schema der Terminduktion

Bsp Größe und Tiefe eines Binärbaums

$$d(E) = 0 \qquad\qquad s(E) = 0$$

$$d(N\ l\ r) = 1 + \max(d(l), d(r)) \qquad s(N\ l\ r) = 1 + s(l) + s(r)$$

$$(\forall t \in T_B(\emptyset))\quad s(t) \leq 2^{d(t)} - 1$$

(ii) $E^{(0)} \rightsquigarrow P(E)$

$$s(E) = 0 \leq 2^{d(E)} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$N^{(2)} \rightsquigarrow P(t_1) \wedge P(t_2) \Longrightarrow P(N\ t_1\ t_2)$

$$\begin{aligned}
s(N\ t_1\ t_2) &= 1 + s(t_1) + s(t_2) \\
&\leq 1 + 2^{d(t_1)} - 1 + 2^{d(t_2)} - 1 \\
&= 2^{d(t_1)} + 2^{d(t_2)} - 1 \\
&\leq 2^{\max(d(t_1), d(t_2))} + 2^{\max(d(t_1), d(t_2))} - 1 \\
&= 2^{1+\max(d(t_1), d(t_2))} - 1 = 2^{d(N\ t_1\ t_2)} - 1
\end{aligned}$$