8.5 Algebra

Sei Σ ein Rangalphabet

Dann ist $\mathcal{A} = \left(A, \{ F_A \mid F \in \Sigma \} \right)$ eine Σ-Algebra.

wobei $A \neq \emptyset$ bel. Menge, die Trägermenge von $\mathcal{A}$.

wenn $F \in \Sigma^{(n)}$: $F_A : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n} \longrightarrow A$ Interpretation von Σ.

Bsp Ω-Algebren

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, I_{\mathbb{Z}})$$

null-stellige:

$$I(0) = () \mapsto 0 \in () \to \mathbb{Z}$$

$$I(1) = () \mapsto 1 \in () \to \mathbb{Z}$$

ein-stellige:

$$I(\mathrm{pred}) = x \mapsto x-1 \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$I(\mathrm{succ}) = x \mapsto x+1 \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$I(+) = (x,y) \mapsto x+y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$\cdot$

$/$ analog

$-$

8.

$\mathcal{P} = (\{0,1\}, I_P)$

$0_P = () \mapsto 0$

$1_P = () \mapsto 1$

$\mathrm{pred}_P = x \mapsto 1-x$

$\mathrm{succ}_P = x \mapsto 1-x$

$+_P = (x,y) \mapsto (x+y) \bmod 2$

$\vdots$

Eine Λ-Algebra $\mathcal{L} = (\{0,1\}, I_L)$

$T_L = () \mapsto 1$

$F_L = () \mapsto 0$

$\neg_L = x \mapsto 1-x$

$\wedge_L = (x,y) \mapsto \min(x,y)$

$\vee_L = (x,y) \mapsto \max(x,y)$

8.6 Auswertung von Termen

<u>Def</u> Sei X eine Menge von Variablen und A Menge
Jede Funktion $\vartheta : X \to A$ heißt <u>Belegung</u>
<u>der Variablen.</u>

<u>Satz</u> X Menge von Variablen, Σ Rangalphabet
$\mathcal{A} = (A, \{F_A \mid F \in \Sigma\})$ ist Σ-Algebra
$\vartheta : X \to A$ ist Belegung der Variablen.
Dann gibt es genau eine Funktion
$\hat{\vartheta} : T_\Sigma(X) \to A$, die ϑ auf $T_\Sigma(X)$ fortsetzt, d.h.:

(i) $(\forall x \in X) \quad \hat{\vartheta}(x) = \vartheta(x)$

(ii) $(\forall n)(\forall F \in \Sigma^{(n)})(\forall t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma(X))$

$$\hat{\vartheta}(F t_1 \dots t_n) = F_A(\hat{\vartheta}(t_1), \dots, \hat{\vartheta}(t_n))$$

Bsp Termauswertung über $\mathcal{L}$

Sei $\vartheta(a) = 0$ Belegung

$\vartheta(b) = 1$

$$\hat{\vartheta}((\wedge\ a\ (\neg\ b)))$$
$$\overset{ii}{=} \wedge_L(\hat{\vartheta}(a), \hat{\vartheta}((\neg\ b)))$$
$$= \wedge_L(0, \neg_L(\hat{\vartheta}(b)))$$
$$= \wedge_L(0, \neg_L(1))$$
$$= \wedge_L(0, 0)$$
$$= 0$$

$$\hat{\vartheta}((\wedge\ T\ (\vee\ a\ b)))$$
$$= \hat{\vartheta}((\wedge\ T\ 1))$$

Falsch, da sinnlose Mischung aus Syntax und Bedeutung

Bew Zu zeigen: - Existenz von $\hat{\vartheta}$

- Eindeutigkeit von $\hat{\vartheta}$

Angenommen es gibt $h : T_\Sigma(X) \to A$
mit h erfüllt (i) und (ii), aber mit $h \neq \hat{\vartheta}$.
Aber per struktureller Induktion zeige
$(\forall t \in T_\Sigma(X))\ \ h(t) = \hat{\vartheta}(t)$

__Induktionsbasis__ $t = x \in X$

$$h(x) \overset{(i)}{=} \vartheta(x) \overset{(i)}{=} \hat{\vartheta}(x) \quad \checkmark$$

__Induktionsschritt__ $t = (F\, t_1 \dots t_n)$

$$\begin{aligned} h(F\, t_1 \dots t_n) &\overset{(ii)}{=} F_A\big(h(t_1), \dots, h(t_n)\big) \\ &\overset{IV}{=} F_A\big(\hat{\vartheta}(t_1), \dots, \hat{\vartheta}(t_n)\big) \\ &\overset{(ii)}{=} \hat{\vartheta}(F\, t_1 \dots t_n) \end{aligned}$$

8.7 Zusammenfassung

- Terme – syntaktische Struktur
  - logische Formeln
  - arithmetische Ausdrücke
  - Programme
- Algebra – Interpretion (Bedeutung, Semantik)
  - Wahrheitswert
  - Zahl
  - "Bed. des Programms"