Informatik I: Einführung in die Programmierung

17. Rekursion, Endrekursion, Iteration

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. Peter Thiemann

01. Februar 2022

Rekursion

Binäre Suche

Potenzieren

Schneller Potenzieren

Sortieren

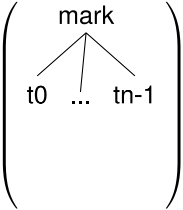
Lindenmayer Systeme

Rekursion

Rekursion und Bäume

- Bäume sind induktiv definiert:
  - Ein Baum ist entweder leer □ oder
  - ein Knoten mit einer Markierung und einer Liste von Teilbäumen.

Rekursion und Bäume

- Bäume sind induktiv definiert:
  - Ein Baum ist entweder leer $\square$ oder
  - ein Knoten mit einer Markierung und einer Liste von Teilbäumen.
- Schema für Funktionen F auf Bäumen, die natürlich rekursiv sind:
  - $F(\square) = A$
  - F 

$= B(\text{mark}, F(\text{t0}), \ldots, F(\text{tn-1}))$
  - B ist ein Programmstück, das die Markierung der Wurzel, sowie die Ergebnisse der Funktionsaufrufe von F auf den Teilbäumen verwenden darf.

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Rekursion und Bäume

Codegerüst

```
@dataclass
class Tree:
    mark : Any
    children : list['Tree']

def tree_skeleton (tree : Optional[Tree]) -> Any:
    if tree is None:
        return "A" # result for empty tree
    else:
        # compute B from
        # - tree.mark
        # - tree_skeleton(tree.children[0])
        # - ...
        # - tree_skeleton(tree.children[n-1])
        #   where n = len (tree.childen)
        return "B"
```

Binäre Suche

Jede Rekursion folgt einer Baumstruktur

Binäre Suche

- Eingabe
  - aufsteigend sortierte Liste `lst : list[T]`
  - Suchbegriff `key : T`
- Ausgabe
  - falls `key in lst`: `i` sodass `lst[i] == key`
  - andernfalls: `None`

Jede Rekursion folgt einer Baumstruktur

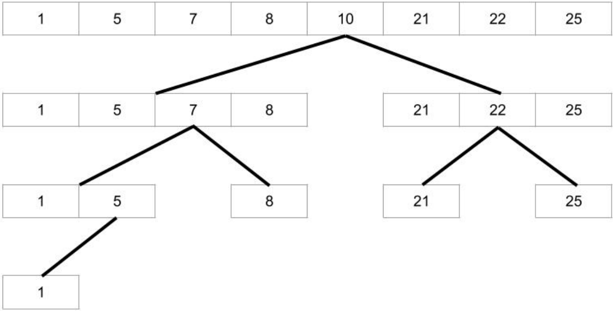
Binäre Suche

- Eingabe
  - aufsteigend sortierte Liste `lst : list[T]`
  - Suchbegriff `key : T`
- Ausgabe
  - falls `key in lst`: `i` sodass `lst[i] == key`
  - andernfalls: `None`

Idee

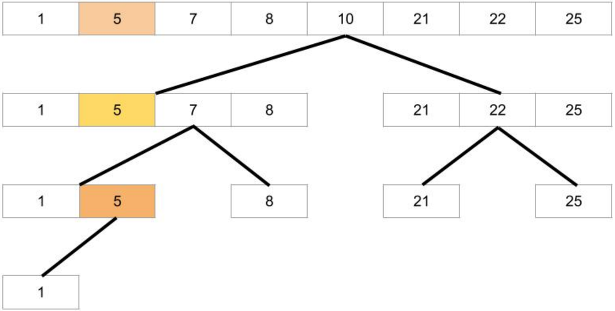
- Betrachte die Liste wie einen binären Suchbaum
- Wähle ein Element als Wurzel: alle Elemente links davon sind kleiner, rechts davon größer
- Optimiere die Effizienz durch geschickte Wahl der Wurzel

Binäre Suche

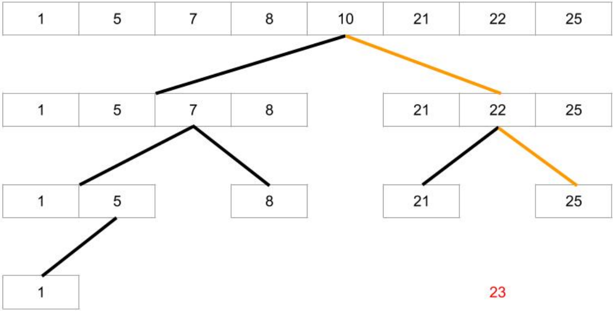


Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Binäre Suche (5) = 1



Binäre Suche (23) = None



Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

```
def bsearch (lst : list[int], key : int) -> Optional[int]:
    n = len (lst)
    if n == 0:
        return None # key not in empty list
    m = n//2          # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch (lst[:m], key)
    else: # lst[m] < key
        r = bsearch (lst[m+1:], key)
        return None if r is None else r+m+1
```

Kritik

- Funktioniert, aber `lst[:m]` und `lst[m+1:]` erzeugen jeweils **Kopien** der halben Liste ($\rightarrow$ ineffizient!)

Kritik

- Funktioniert, aber `lst[:m]` und `lst[m+1:]` erzeugen jeweils **Kopien** der halben Liste ($\rightarrow$ ineffizient!)
- Alternative: Suche jeweils zwischen Startpunkt und Endpunkt in `lst`

Kritik

- Funktioniert, aber `lst[:m]` und `lst[m+1:]` erzeugen jeweils **Kopien** der halben Liste ($\rightarrow$ ineffizient!)
- Alternative: Suche jeweils zwischen Startpunkt und Endpunkt in `lst`
- Der rekursive Aufruf muss nur den Start- bzw. Endpunkt verschieben

```
def bsearch (lst : list[int], key : int):
    return bsearch2 (lst, key, 0, len (lst))

def bsearch2 (lst : list[int], key : int,
              low : int, high : int):
    """ search for key in lst between low
    (inclusive) and high (exclusive)
    assumes low <= high """
    ...
```

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Binäre Suche ohne Kopieren

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int):
    n = hi - lo      # length of list segment
    if n == 0:
        return None # key not in empty segment
    m = lo + n//2    # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Binäre Suche ohne Kopieren

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int):
    n = hi - lo      # length of list segment
    if n == 0:
        return None # key not in empty segment
    m = lo + n//2    # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

Binäre Suche ohne Kopieren

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int):
    n = hi - lo       # length of list segment
    if n == 0:
        return None # key not in empty segment
    m = lo + n//2     # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

- `n == 0` entspricht `hi - lo == 0` und damit `lo == hi`

Binäre Suche ohne Kopieren

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int):
    n = hi - lo      # length of list segment
    if n == 0:
        return None # key not in empty segment
    m = lo + n//2    # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

- `n == 0` entspricht `hi - lo == 0` und damit `lo == hi`
- `lo + (hi - lo)//2 == (lo + hi)//2`

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int):
    if lo == hi:
        return None # key not in empty segment
    m = (lo + hi)//2    # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int):
    if lo == hi:
        return None # key not in empty segment
    m = (lo + hi)//2    # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int):
    if lo == hi:
        return None # key not in empty segment
    m = (lo + hi)//2    # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

- Jeder rekursive Aufruf von `bsearch2` erfolgt in **`return`**.

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int):
    if lo == hi:
        return None # key not in empty segment
    m = (lo + hi)//2    # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

- Jeder rekursive Aufruf von `bsearch2` erfolgt in **`return`**.
- Solche Aufrufe heißen **endrekursiv**.

Endrekursive Funktionen

Definition

Endrekursive Funktionen haben nur endrekursive Aufrufe.

Elimination von Endrekursion durch Iteration

- Endrekursive Funktionen können durch `while`-Schleifen (Iteration) implementiert werden.
- Die Abbruchbedingung der Rekursion wird negiert zur Bedingung der `while`-Schleife.
- Der Rest des Funktionsrumpfs wird zum Rumpf der `while`-Schleife.
- Die endrekursiven Aufrufe werden zu Zuweisungen an die Parameter.

Beispiel bsearch2

`bsearch2` ist endrekursive Funktion

Abbruchbedingung der Rekursion:

```
    if lo == hi:
        return None
```

wird negiert zur Bedingung der **`while`**-Schleife

```
    while lo != hi:
        ...
    else:
        return None
```

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Beispiel bsearch2

bsearch2 ist endrekursive Funktion

Endrekursive Aufrufe

```
return bsearch2 (lst, key, lo, m)
```

werden zu Zuweisungen an die Parameter

```
lst, key, lo, hi = lst, key, lo, m
```

bzw. hier reicht

```
hi = m
```


Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Binäre Suche ohne Kopieren, iterativ

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int):
    while lo != hi:
        m = (lo + hi)//2
        if lst[m] == key:
            return m
        elif lst[m] > key:
            hi = m     # bsearch2 (lst, key, lo, m)
        else: # lst[m] < key
            lo = m+1   # bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
    else:
        return None
```

Suche im binären Suchbaum

Ebenfalls endrekursiv

```
def search(tree : Optional[Node], item : Any):
    if tree is None:
        return False
    elif tree.mark == item:
        return True
    elif tree.mark > item:
        return search(tree.left, item)
    else:
        return search(tree.right, item)
```

- Gleiches Muster … nicht überraschend

Suche im binären Suchbaum

Iterativ


```
def search(tree : Optional[Node], item : Any):
    while tree is not None:
        if tree.mark == item:
            return True
        elif tree.mark > item:
            tree = tree.left
        else:
            tree = tree.right
    else:
        return False
```

Potenzieren

Rekursion

Binäre Suche

Potenzieren

Rekursive Definition

Schneller Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer Systeme

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Rekursive Definition
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder "informatisch" hingeschrieben

```
power (x, 0)   == 1
power (x, n+1) == x * power (x, n)
```

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder "informatisch" hingeschrieben

```
power (x, 0)    == 1
power (x, n+1)  == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder “informatisch” hingeschrieben

```
power (x, 0)    == 1
power (x, n+1)  == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder "informatisch" hingeschrieben

```
power (x, 0)    == 1
power (x, n+1)  == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
  - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Rekursive Definition
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder “informatisch” hingeschrieben

```
power (x, 0)    == 1
power (x, n+1)  == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
  - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder
  - der Nachfolger $1 + (n)$ einer natürlichen Zahl n.

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder “informatisch” hingeschrieben

```
power (x, 0)    == 1
power (x, n+1)  == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
  - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder
  - der Nachfolger $1 + (n)$ einer natürlichen Zahl n.
- In Bäumen: 0 1+

$$\begin{array}{c} 1+ \\ | \\ n \end{array}$$

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder “informatisch” hingeschrieben

```
power (x, 0)    == 1
power (x, n+1)  == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
  - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder
  - der Nachfolger $1 + (n)$ einer natürlichen Zahl n.
- In Bäumen: 0 $\quad$ 1+ (mit Kind n)
- Daraus ergibt sich das Codegerüst.

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Rekursive Definition
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Potenzfunktion rekursiv

```
def power (x : complex, n : int):
    """ x ** n for n >= 0 """
    if n==0:
        return 1
    else:   # n = 1+n'
        return x * power (x, n-1)
```

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Rekursive Definition
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Rekursive Definition
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

  $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

→ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

  → `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

    → `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

  $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

    $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

      $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

  $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

    $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

      $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:

      $\leftarrow$ `power`(2,0) gibt 1 zurück

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:
    $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:
        $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:
            $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:
            $\leftarrow$ `power`(2,0) gibt 1 zurück
        $\leftarrow$ `power`(2,1) gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

$\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

$\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

$\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:

$\leftarrow$ `power`(2,0) gibt 1 zurück

$\leftarrow$ `power`(2,1) gibt (2×1) = 2 zurück

$\leftarrow$ `power`(2,2) gibt (2×2) = 4 zurück

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

  $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

    $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

      $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:

      $\leftarrow$ `power`(2,0) gibt 1 zurück

    $\leftarrow$ `power`(2,1) gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück

  $\leftarrow$ `power`(2,2) gibt $(2 \times 2) = 4$ zurück

$\leftarrow$ `power`(2,3) gibt $(2 \times 4) = 8$ zurück

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:
    $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:
        $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:
            $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:
            $\leftarrow$ `power`(2,0) gibt 1 zurück
        $\leftarrow$ `power`(2,1) gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück
    $\leftarrow$ `power`(2,2) gibt $(2 \times 2) = 4$ zurück
$\leftarrow$ `power`(2,3) gibt $(2 \times 4) = 8$ zurück

Power ist **nicht** endrekursiv

```
def power (x : complex, n : int):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * power (x, n-1)
```


Rekursion

Binäre Suche

Potenzieren

Rekursive Definition

Schneller Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer Systeme

Power ist **nicht** endrekursiv

```
def power (x : complex, n : int):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch *rückwärts* in einem akkumulierenden Argument berechnen.

Power ist **nicht** endrekursiv

```
def power (x : complex, n : int):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch *rückwärts* in einem akkumulierenden Argument berechnen.

```
def power_acc (x : complex, n : int, acc : complex):
    if n==0:
        return acc
    else:
        return power_acc (x, n-1, acc * x)
```

Power ist **nicht** endrekursiv

```
def power (x : complex, n : int):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch *rückwärts* in einem akkumulierenden Argument berechnen.

```
def power_acc (x : complex, n : int, acc : complex):
    if n==0:
        return acc
    else:
        return power_acc (x, n-1, acc * x)
```

Power ist **nicht** endrekursiv

```
def power (x : complex, n : int):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch *rückwärts* in einem akkumulierenden Argument berechnen.

```
def power_acc (x : complex, n : int, acc : complex):
    if n==0:
        return acc
    else:
        return power_acc (x, n-1, acc * x)
```

Iterative Power

- Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex = 1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Iterative Power

- Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex = 1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

- Startwert `acc = 1` im Funktionskopf definiert.

Iterative Power

- Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex = 1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

- Startwert `acc = 1` im Funktionskopf definiert.
- Jeder Aufruf `power_it (x, n)` verwendet `acc=1`.

Iterative Power

- Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex = 1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

- Startwert `acc = 1` im Funktionskopf definiert.
- Jeder Aufruf `power_it (x, n)` verwendet `acc=1`.
- Ein Aufruf (z.B.) `power_it (x, n, 42)` startet mit `acc=42`.

Schneller Potenzieren

Rekursion

Binäre Suche

Potenzieren

Schneller Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer Systeme

Efficient Power

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen benötigen wir zur Berechnung von

- `power (x, 0)`?

Rekursion

Binäre Suche

Potenzieren

Schneller Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer Systeme

Efficient Power

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen benötigen wir zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0

Efficient Power

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen benötigen wir zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?`

Rekursion

Binäre Suche

Potenzieren

Schneller Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer Systeme

Efficient Power

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen benötigen wir zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1

Efficient Power

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen benötigen wir zur Berechnung von

- `power (x, 0)`? 0
- `power (x, 1)`? 1
- `power (x, 2)`?

Efficient Power

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen benötigen wir zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2

Efficient Power

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen benötigen wir zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2
- `power (x, n)?`

Efficient Power

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen benötigen wir zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2
- `power (x, n)?` n

Efficient Power

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen benötigen wir zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2
- `power (x, n)?` n

Mehr Multiplikationen als unbedingt notwendig!

Alternative Definition von Power

```
power(x, 0)      == 1
power(x, 2*n)    == power(x*x, n)       # n>0
power(x, 2*n+1)  == x * power(x*x, n)   # n>=0
```

Alternative Definition von Power

```
power(x, 0)       == 1
power(x, 2*n)     == power(x*x, n)       # n>0
power(x, 2*n+1)   == x * power(x*x, n)   # n>=0
```

- Alternative Aufteilung der natürlichen Zahlen.

Alternative Definition von Power

```
power(x, 0)       == 1
power(x, 2*n)     == power(x*x, n)       # n>0
power(x, 2*n+1)   == x * power(x*x, n)   # n>=0
```

- Alternative Aufteilung der natürlichen Zahlen.
- Jede natürliche Zahl ungleich 0 ist entweder gerade oder ungerade.

Alternative Definition von Power

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

```
power(x, 0)       == 1
power(x, 2*n)     == power(x*x, n)      # n>0
power(x, 2*n+1)   == x * power(x*x, n)  # n>=0
```

- Alternative Aufteilung der natürlichen Zahlen.
- Jede natürliche Zahl ungleich 0 ist entweder gerade oder ungerade.
- In jedem Fall können wir die Berechnung von `power` entweder sofort abbrechen oder auf die `power` mit einem echt kleineren Exponenten `n` zurückführen.

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$?

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$?

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$?

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex , n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$?

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? k+2

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? k+2
- Multiplikationen für $n < 2^k$: höchstens $2k \approx 2\log_2 n$.

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? k+2
- Multiplikationen für $n < 2^k$: höchstens $2k \approx 2 \log_2 n$.
- Schneller als die `power` Funktion: logarithmisch viele Multiplikationen!

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? k+2
- Multiplikationen für $n < 2^k$: höchstens $2k \approx 2 \log_2 n$.
- Schneller als die `power` Funktion: logarithmisch viele Multiplikationen!
- Berechnung von `n//2` und `n%2` ist billig. Warum?

Schnelle Exponentiation, iterativ?


```
def fast_power (x : complex, n : int):
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Nicht endrekursiv!
- Aber es kann wieder ein akkumulierender Parameter eingeführt werden, der die äußeren Multiplikationen mit dem `x` durchführt.

Schnelle Exponentiation, endrekursiv!

```
def fast_power_acc (x : complex, n : int, acc : complex = 1):
    if n == 0:
        return acc
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power_acc(x*x, n//2, acc)
    else: # n % 2 == 1
        return fast_power_acc(x*x, n//2, acc*x)
```

Schnelle Exponentiation, iterativ!

Schematische Transformation liefert

```
def fast_power_it (x : complex, n : int, acc : complex = 1):
    while n != 0:
        if n % 2 == 0:
            x, n, acc = (x*x, n//2, acc)
        else: # n % 2 == 1
            x, n, acc = (x*x, n//2, acc*x)
    else:
        return acc
```

Sortieren

Sortieren

- Eingabe
  - Liste `lst : list[T]`
  - (Ordnung <= auf den Listenelementen vom Typ `T`)
- Ausgabe
  - aufsteigend sortierte Liste (gemäß <=)
  - jedes Element muss in der Ausgabe genauso oft vorkommen wie in der Eingabe

Sortieren

Sortieren

- Eingabe
  - Liste `lst : list[T]`
  - (Ordnung <= auf den Listenelementen vom Typ `T`)
- Ausgabe
  - aufsteigend sortierte Liste (gemäß <=)
  - jedes Element muss in der Ausgabe genauso oft vorkommen wie in der Eingabe

Sortieren durch Partitionieren

- Quicksort
- Erdacht von Sir C.A.R. Hoare um 1960
- Lange Zeit einer der schnellsten Sortieralgorithmen

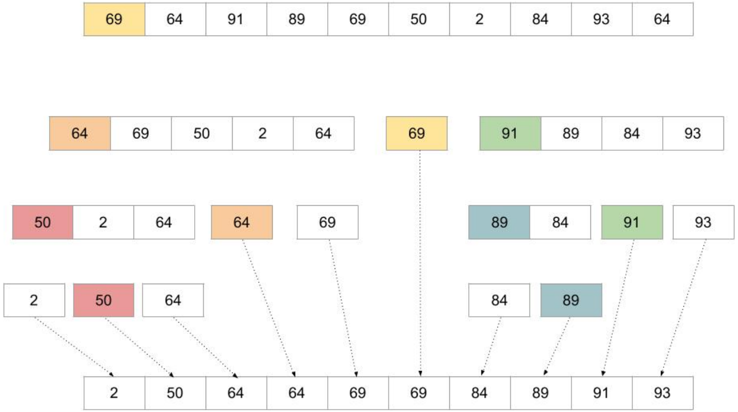
Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Quicksort

Vorgehensweise

- Falls `lst` leer ist, so ist die Ausgabe die leere Liste.
- Sonst wähle ein Element `p` aus `lst`.
- Sei `lst_lo` die Liste der Elemente aus `lst`, die `<= p` sind.
- Sei `lst_hi` die Liste der Elemente aus `lst`, die nicht `<= p` sind.
- Sortiere `lst_lo` und `lst_hi` mit Ergebnissen `sort_lo` und `sort_hi`.
- Dann ist `sort_lo + [p] + sort_hi` eine sortierte Version von `lst`.

Quicksort Beispiel



Rekursion

Binäre Suche

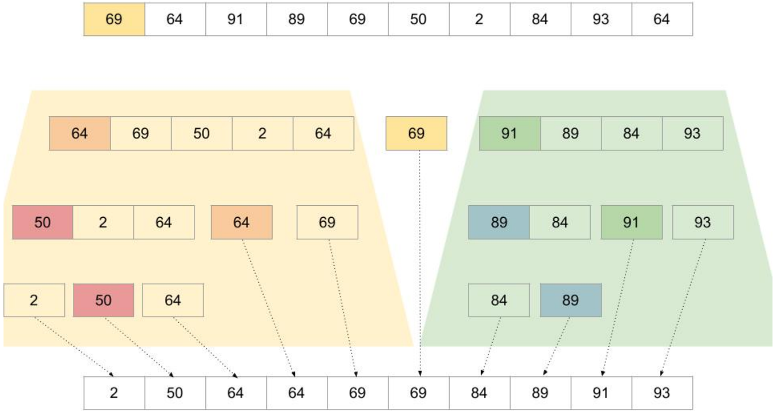
Potenzieren

Schneller Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer Systeme

Quicksort Beispiel



Implementierung

```
def quicksort (lst : list[int]):
    if len (lst) <= 1:
        return lst
    else:
        p, lst_lo, lst_hi = partition (lst)
        return (quicksort (lst_lo)
                + [p]
                + quicksort (lst_hi))
```

Implementierung

```
def quicksort (lst : list[int]):
    if len (lst) <= 1:
        return lst
    else:
        p, lst_lo, lst_hi = partition (lst)
        return (quicksort (lst_lo)
                + [p]
                + quicksort (lst_hi))
```

Wunschdenken

- Wir nehmen an, dass `partition (lst)` für `len (lst)>=1` ein 3-Tupel liefert, wobei
  - `p` ist ein Element von `lst`
  - `lst_lo` enthält die Elemente <= `p`
  - `lst_hi` enthält die Elemente > `p`

Partition

```
def partition (lst):
    """ assume len (lst) >= 1 """
    p, rest = lst[0], lst[1:]
    lst_lo = []
    lst_hi = []
    for x in rest:
        if x <= p:
            lst_lo = lst_lo + [x]
        else:
            lst_hi = lst_hi + [x]
    return p, lst_lo, lst_hi
```

- Codegerüst für Listenverarbeitung
- Zwei Akkumulatoren `lst_lo` und `lst_hi`

Betrachtung von Quicksort

- Der rekursive Algorithmus ist die einfachste Beschreibung von Quicksort.
- Eine iterative Implementierung ist möglich.
- Diese ist aber deutlich schwieriger zu verstehen.

Lindenmayer Systeme

Rekursion

Binäre Suche

Potenzieren

Schneller Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer Systeme

Lindenmayer Systeme

Wikipedia

Bei den Lindenmayer- oder L-Systemen handelt es sich um einen mathematischen Formalismus, der 1968 von dem ungarischen theoretischen Biologen Aristid Lindenmayer als Grundlage einer axiomatischen Theorie biologischer Entwicklung vorgeschlagen wurde. In jüngerer Zeit fanden L-Systeme Anwendung in der Computergrafik bei der Erzeugung von Fraktalen und in der realitätsnahen Modellierung von Pflanzen.

Lindenmayer Systeme

Wikipedia

Bei den Lindenmayer- oder L-Systemen handelt es sich um einen mathematischen Formalismus, der 1968 von dem ungarischen theoretischen Biologen Aristid Lindenmayer als Grundlage einer axiomatischen Theorie biologischer Entwicklung vorgeschlagen wurde. In jüngerer Zeit fanden L-Systeme Anwendung in der Computergrafik bei der Erzeugung von Fraktalen und in der realitätsnahen Modellierung von Pflanzen.

Lindenmayer Systeme, formal

Definition

Ein 0L-System ist ein Tupel $G = (V, \omega, P)$, wobei

- V eine Menge von Symbolen (Alphabet),
- $\omega \in V^*$ ein String von Symbolen und
- $P \subseteq V \times V^*$ eine Menge von Produktionen ist, wobei zu jedem $A \in V$ mindestens eine Produktion $(A, w) \in P$ existieren muss.

Lindenmayer Systeme, formal

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Definition

Ein 0L-System ist ein Tupel $G = (V, \omega, P)$, wobei

- V eine Menge von Symbolen (Alphabet),
- $\omega \in V^*$ ein String von Symbolen und
- $P \subseteq V \times V^*$ eine Menge von Produktionen ist, wobei zu jedem $A \in V$ mindestens eine Produktion $(A, w) \in P$ existieren muss.

Beispiel (Lindenmayer): 0L-System für Algenwachstum

- $V = \{A, B\}$
- $\omega = A$
- $P = \{A \to BA, B \to A\}$

Wie rechnet ein 0L-System?

Definition

Sei $G = (V, \omega, P)$ ein 0L-System.
Sei $A_1 A_2 \ldots A_n$ ein String über Symbolen aus V (also $A_i \in V$).
Ein Schritt von G ersetzt jedes Symbol durch eine zugehörige rechte Produktionsseite:

$$A_1 A_2 \ldots A_n \Rightarrow w_1 w_2 \ldots w_n$$

wobei $(A_i, w_i) \in P$, für $1 \leq i \leq n$.
Die Sprache von G besteht aus allen Strings, die aus ω durch endlich viele $\Rightarrow$-Schritte erzeugt werden können.

Rekursion

Binäre Suche

Potenzieren

Schneller Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer Systeme

Beispiel Algenwachstum

$P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A

Beispiel Algenwachstum

$P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA

Beispiel Algenwachstum

$P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA
3. ABA

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Beispiel Algenwachstum

$P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$

Beispiel Algenwachstum

$P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$
5. $ABABAABA$

Beispiel Algenwachstum

$P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$
5. $ABABAABA$
6. $BAABAABABAABA$

Beispiel Algenwachstum

$P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$
5. $ABABAABA$
6. $BAABAABABAABA$
7. $ABABAABABAABAABABAABA$

Beispiel Algenwachstum

$P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$
5. $ABABAABA$
6. $BAABAABABAABA$
7. $ABABAABABAABAABABAABA$
8. usw

Beispiel Kochkurve

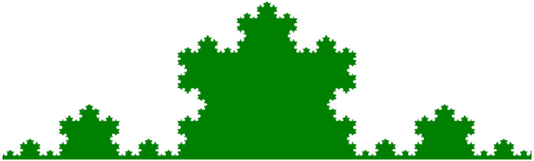
- Die Kochkurve ist ein Fraktal.

Beispiel Kochkurve

- Die Kochkurve ist ein Fraktal.
- D.h. eine selbstähnliche Kurve mit rekursiver Beschreibung und weiteren spannenden Eigenschaften.

Beispiel Kochkurve

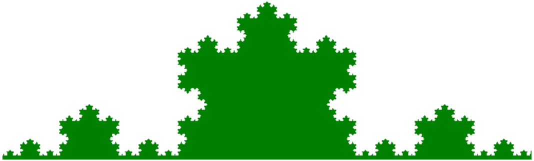
- Die Kochkurve ist ein Fraktal.
- D.h. eine selbstähnliche Kurve mit rekursiver Beschreibung und weiteren spannenden Eigenschaften.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kochkurve.png

Beispiel Kochkurve

- Die Kochkurve ist ein Fraktal.
- D.h. eine selbstähnliche Kurve mit rekursiver Beschreibung und weiteren spannenden Eigenschaften.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kochkurve.png

- Sie kann durch ein 0L-System beschrieben werden.

Kochkurve

0L-System für die Kochkurve

- $V = \{F, +, -\}$
- $\omega = F$
- $P = \{F \mapsto F + F - F + F\}$ sowie $+ \mapsto +$ und $- \mapsto -$

Kochkurve

0L-System für die Kochkurve

- $V = \{F, +, -\}$
- $\omega = F$
- $P = \{F \mapsto F + F - F + F\}$ sowie $+ \mapsto +$ und $- \mapsto -$

Interpretation

- F Strecke vorwärts zeichnen
- $+$ um 60° nach links abbiegen
- $-$ um 120° nach rechts abbiegen

Zeichenmodell: Turtle-Graphics

Idee der “Schildkrötengrafik”

Eine Schildkröte sitzt auf einer Zeichenfläche. Sie kann eine bestimmte Strecke geradeaus gehen oder abbiegen. Wenn ihr Hintern dabei über den Boden schleift, hinterläßt sie einen geraden Strich.

Zeichenmodell: Turtle-Graphics

Idee der "Schildkrötengrafik"

Eine Schildkröte sitzt auf einer Zeichenfläche. Sie kann eine bestimmte Strecke geradeaus gehen oder abbiegen. Wenn ihr Hintern dabei über den Boden schleift, hinterläßt sie einen geraden Strich.

Befehle an die Schildkröte

```
from turtle import *
pencolor('black') #use the force
pendown()         #let it all hang out
forward(100)
left(120)
forward(100)
left(120)
forward(100)
```

Schildkröten-Interpretation

Die Operationen

- F `forward (size)`
- $+$ `left (60)`
- $-$ `right (120)`

Schildkröten-Interpretation

Die Operationen

- F `forward (size)`
- $+$ `left (60)`
- $-$ `right (120)`

Die Produktion $F \mapsto F + F - F + F$

```
def koch(size:float, n:int):
    #...
    koch(size/3, n-1)  #F
    left(60)           #+
    koch(size/3, n-1)  #F
    right(120)         #-
    koch(size/3, n-1)  #F
    left(60)           #+
    koch(size/3, n-1)  #F
```

Die letzte Generation

```
def koch (size:float, n:int):
    if n == 0:
        forward(size)
    else:
        koch (size/3, n-1)
        left(60)
        koch (size/3, n-1)
        right(120)
        koch (size/3, n-1)
        left(60)
        koch (size/3, n-1)
```

Beispiel Fraktaler Binärbaum

0L-System für fraktale Binärbäume

- $V = \{0, 1, [,]\}$
- $\omega = 0$
- $P = \{1 \mapsto 11, 0 \mapsto 1[0]0\}$

Beispiel Fraktaler Binärbaum

0L-System für fraktale Binärbäume

- $V = \{0, 1, [,]\}$
- $\omega = 0$
- $P = \{1 \mapsto 11, 0 \mapsto 1[0]0\}$

Interpretation

- 0 Strecke vorwärts zeichnen mit Blatt am Ende
- 1 Strecke vorwärts zeichnen
- [Position und Richtung merken und um 45° nach links abbiegen
-] Position und Richtung von zugehöriger öffnender Klammer wiederherstellen und um 45° nach rechts abbiegen

Turtle-Graphics Implementierung Teil 1

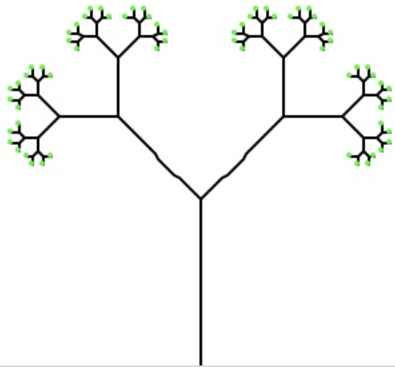
```
def btree₁ (size:float, n:int):
    if n == 0:
        forward (size)
    else:
        n = n - 1
        btree₁ (size/3, n)
        btree₁ (size/3, n)
```

- `n==0`: letzte Generation erreicht
- Faktor $1/3$ willkürlich gewählt

Rekursion
Binäre Suche
Potenzieren
Schneller Potenzieren
Sortieren
Lindenmayer Systeme

Turtle-Graphics Implementierung Teil 0

```
def btree_0 (size:float, n:int):
    if n == 0:
        forward(size)          # line segment
        dot (2, 'green')       # draw leaf
    else:
        n = n - 1
        btree_1 (size/3, n)   # "1"
        pos = position()       # "["
        ang = heading()
        left(45)
        btree_0 (size/3, n)   # "0"
        penup()                # "]"
        setposition (pos)
        setheading (ang)
        pendown()
        right (45)
        btree_0 (size/3, n)   # "0"
```



Zusammenfassung

- Induktion ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.

Zusammenfassung

- Induktion ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Induktiv definierte Funktionen können meist kurz und elegant rekursiv implementiert werden.

Zusammenfassung

- Induktion ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Induktiv definierte Funktionen können meist kurz und elegant rekursiv implementiert werden.
- Funktionen auf induktiv definierten Daten (d.h. baumartigen Strukturen) sind generell rekursiv.

Zusammenfassung

- Induktion ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Induktiv definierte Funktionen können meist kurz und elegant rekursiv implementiert werden.
- Funktionen auf induktiv definierten Daten (d.h. baumartigen Strukturen) sind generell rekursiv.
- In Python ist Rekursion ist nicht immer die effizienteste Implementierung einer Funktion!

Zusammenfassung

- Induktion ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Induktiv definierte Funktionen können meist kurz und elegant rekursiv implementiert werden.
- Funktionen auf induktiv definierten Daten (d.h. baumartigen Strukturen) sind generell rekursiv.
- In Python ist Rekursion ist nicht immer die effizienteste Implementierung einer Funktion!
- Endrekursion kann schematisch in effiziente Iteration umgewandelt werden.

Zusammenfassung

- Induktion ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Induktiv definierte Funktionen können meist kurz und elegant rekursiv implementiert werden.
- Funktionen auf induktiv definierten Daten (d.h. baumartigen Strukturen) sind generell rekursiv.
- In Python ist Rekursion ist nicht immer die effizienteste Implementierung einer Funktion!
- Endrekursion kann schematisch in effiziente Iteration umgewandelt werden.
- Allgemeine Rekursion ist komplizierter umzuwandeln.