



2. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Palindrome

2+3 Punkte

Sei Σ ein Alphabet. Die Menge P^n der Palindrome der Länge n über Σ ist wie folgt induktiv definiert:

$$\begin{aligned}P^0 &:= \{\varepsilon\} \\P^1 &:= \{a \mid a \in \Sigma\} \\P^n &:= \{a \cdot w \cdot a \mid a \in \Sigma, w \in P^{n-2}\}\end{aligned}$$

Die Menge aller Palindrome P ist dann $\bigcup_{n \geq 0} P^n$.

- Sei $\#_a(w)$ die Anzahl der a s in einem Wort w ($a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$). Beweisen Sie: Für jedes Palindrom $p \in P$ gerader Länge und jedes $a \in \Sigma$ ist $\#_a(p)$ gerade.
- Der Rückwärtsoperator für Wörter ist wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned}.^R &: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \\ \varepsilon^R &:= \varepsilon \\ (a \cdot w)^R &:= w^R \cdot a \quad \forall a \in \Sigma, w \in \Sigma^*\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass alle Palindrome vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}. \forall w \in P^n. w^R = w.$$

Beweisen Sie falls nötig folgendes Hilfslemma separat.

$$\forall a \in \Sigma. \forall w \in \Sigma^*. (w \cdot a)^R = a \cdot w^R.$$

Hinweis: In Ihren Beweisen müssen Sie wahrscheinlich eine Verallgemeinerung der vollständigen Induktion verwenden. Angenommen, Sie wollen zeigen, dass das Prädikat P für alle natürlichen Zahlen gilt, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$$

Bisher haben Sie im Induktionsschritt immer angenommen, dass das Prädikat Q für n gilt und daraus geschlossen, dass Q auch für $n + 1$ gilt. Formal:

$$\forall n \in \mathbb{N}. Q(n) \implies Q(n + 1)$$

Ebenfalls gültig ist jedoch eine stärkere Variante, in der Sie annehmen, dass Q bereits für *alle* $m < n + 1$ bewiesen wurde:

$$\forall n \in \mathbb{N}. (\forall m < n + 1. Q(m)) \implies Q(n + 1)$$

Intuitiv lässt sich das wie folgt rechtfertigen: Angenommen, Sie wollen $Q(n)$ für ein bestimmtes n beweisen. Dann gilt nach Induktionsanfang $Q(0)$. Mit Induktionsschritt folgt:

$$(\forall m < 1. Q(m)) \implies Q(1)$$

Da $Q(0)$ bereits gezeigt ist (und es keine anderen $m < 1$ gibt), gilt auch $Q(1)$, und so weiter für alle natürlichen Zahlen bis n .

Weiterhin müssen Sie hier im Induktionsanfang zwei Aussagen beweisen (für $n = 0$ und $n = 1$), entsprechend den zwei Basisfällen der induktiven Definition von P^n .

Nebenbemerkung: Der Beweis in b) wäre trivial, wenn man Palindrome über ihre charakteristische Eigenschaft definieren würde:

$$P^n := \{w \in \Sigma^n \mid w^R = w\}$$

Dann wäre der Beweis für a) allerdings wesentlich schwieriger, weil man erst beweisen müsste, dass die Palindrome eine bestimmte Struktur haben.

Aufgabe 2: Turingmaschinen

2+3+3+2 Punkte

a) Konstruieren Sie folgende Turingmaschinen:

- i) \mathcal{M}_i , sodass die von \mathcal{M}_i berechnete Funktion $f_{\mathcal{M}_i}$ die Addition auf den natürlichen Zahlen in Unärdarstellung ist. Geben Sie die Transitionsfunktion δ als Tabelle an. Markieren Sie dabei den Startzustand und die akzeptierenden Zustände.

Die natürlichen Zahlen in Unärdarstellung sind die Sprache Σ^* über dem Alphabet $\Sigma := \{| \}$. Dabei entspricht die Anzahl der Striche der dargestellten Zahl. Beispiele sind $\varepsilon \equiv 0$, $| \equiv 1$ und $||| \equiv 3$.

Beispiele für die Anwendung der von \mathcal{M}_i berechneten Funktion $f_{\mathcal{M}_i}$:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{M}_i}(|\#) &= | \\ f_{\mathcal{M}_i}(||\#) &= ||| \end{aligned}$$

Dabei trennt das Zeichen $\#$ die zwei Funktionsargumente, d.h. wenn $1 + 2$ berechnet werden soll, ist der Bandinhalt in der Anfangskonfiguration

$$\sqcup \dots \sqcup |\#| \sqcup \dots \sqcup$$

- ii) \mathcal{M}_{ii} , sodass die von \mathcal{M}_{ii} erkannte Sprache $L(\mathcal{M}_{ii}) := \{w \in \{0, 1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$ ist. Dabei bezeichnet $\#_a(w)$ wie oben die Anzahl der a s in w . Geben Sie ein Flussdigramm (s. Hinweis) an. Verwenden Sie einen Übergang in die spezielle TM success, um zu signalisieren, dass ein Wort erkannt wurde.

- iii) \mathcal{M}_{iii} , sodass die von \mathcal{M}_{iii} berechnete Funktion $f_{\mathcal{M}_{iii}}$ der Dekrementoperator auf den natürlichen Zahlen in Binärdarstellung ist. Geben Sie ein Flussdiagramm (s. Hinweis) an.

Beispiele:

$$f_{\mathcal{M}_{iii}}(0000) = 0000$$

$$f_{\mathcal{M}_{iii}}(0001) = 0000$$

$$f_{\mathcal{M}_{iii}}(0010) = 0001$$

Beschreiben Sie außerdem jeweils kurz die Funktionsweise der von Ihnen konstruierten Turingmaschine.

- b) Zeigen Sie, dass für Ihre in a.i) definierte Turingmaschine gilt:

$$f_i(|\#|) = |||.$$

Hinweise:

- Um zu zeigen, dass eine Turingmaschine ein bestimmtes Wort berechnet, argumentieren Sie mit der reflexiven transitiven Hülle der Schrittrelation \vdash, \vdash^* .

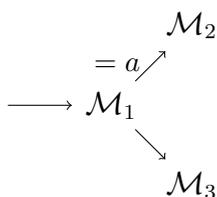
• **(Flussdiagrammdarstellung von Turingmaschinen)**

Um die Übergangsfunktion von Turingmaschinen (TM) kompakt darzustellen, führen wir sogenannte Flussdiagramme ein. Mit diesen lassen sich komplexe TMn aus einfacheren zusammensetzen. Dabei gibt es folgende Übergänge zwischen TMn:

- (a) $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{a} \mathcal{M}_2$ ist die TM, die zunächst die Teil-TM \mathcal{M}_1 ausführt. Hält \mathcal{M}_1 auf einem Feld mit dem Symbol $a \in \Gamma$ an, so wird anschließend \mathcal{M}_2 ausgeführt.
- (b) $\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ ist die TM, die zunächst die Teil-TM \mathcal{M}_1 ausführt. Hält \mathcal{M}_1 , so wird anschließend \mathcal{M}_2 ausgeführt.
- (c) $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$ ist eine Abkürzung für $\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$.
- (d) $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\neq a_1, \dots, \neq a_k} \mathcal{M}_2$ ist die TM, die zunächst die Teil-TM \mathcal{M}_1 ausführt. Hält \mathcal{M}_1 auf einem Feld mit dem Symbol b und ist $b \notin \{a_1, \dots, a_k\}$ ($\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \Gamma$), so wird anschließend \mathcal{M}_2 ausgeführt.

Vorausgesetzt ist dabei, dass die Teil-TMn \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 jeweils genau einen Endzustand haben. Außerdem wird in jedem Flussdiagramm genau eine TM durch einen eingehenden Pfeil als Start-TM gekennzeichnet.

TMn können auch Übergänge zu mehreren TMn haben, aber diese müssen sich gegenseitig ausschließen. Zum Beispiel ist folgendes Flussdiagramm nicht erlaubt:



Hier ist unklar, welche TM ausgeführt werden soll, wenn \mathcal{M}_1 auf einem Feld mit Symbol a hält.

Übergänge können auch Schleifen sein, d.h. eine Turingmaschine kann wieder sich selbst starten, wenn sie hält.

Wir definieren drei elementare Turingmaschinen, die grundlegende Funktionen zur Verfügung stellen. Sei dazu $\Gamma := \{a_0, \dots, a_n\}$ ein Bandalphabet mit beliebigen Zeichen.

- Kleine Rechtsmaschine r : geht einen Schritt nach rechts und hält.

Übergangsfunktion in Tabellendarstellung:

$$r \quad \begin{array}{cc|cc} z_0 & a_0 & z_e & a_0 & R \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_0 & a_n & z_e & a_n & R \end{array}$$

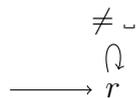
- Kleine Linksmaschine l : analog zur Kleinen Rechtsmaschine.
- Druckmaschine P_a für $a \in \Gamma$: schreibt das Symbol a auf das Band und hält.

Übergangsfunktion in Tabellendarstellung:

$$P_a \quad \begin{array}{cc|cc} z_0 & a_0 & z_e & a & N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_0 & a_n & z_e & a & N \end{array}$$

Auf Basis dieser TMn können wir mit Flussdiagrammen weitere definieren. Beispiele:

- Große Rechtsmaschine R : geht einen Schritt nach rechts und anschließend so lange weiter nach rechts, bis sie ein Leerzeichen liest.



- Große Linksmaschine L : analog zur Großen Rechtsmaschine.
- Maschine zum linksseitigen Anfügen addl_a ($a \in \Gamma$): geht bis zum ersten Leerzeichen nach links und ersetzt dieses durch a .



Sie dürfen in Ihren Flussdiagrammen alle hier definierten TMn verwenden.