ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann
Manuel Geffken

30.10.2015
Abgabe bis spätestens Freitag 06.11.2015, 10 Uhr
in die Briefkästen in Gebäude 51

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Palindrome 2+3 Punkte

Sei Σ ein Alphabet. Die Menge P^n der Palindrome der Länge n über Σ ist wie folgt induktiv definiert:

$$\begin{array}{lcl} P^0 & := & \{\varepsilon\} \\ P^1 & := & \{a \mid a \in \Sigma\} \\ P^n & := & \{a \cdot w \cdot a \mid a \in \Sigma, w \in P^{n-2}\} \end{array}$$

Die Menge aller Palindrome P ist dann $\bigcup_{n \geq 0} P^n$.

a) Sei $\#_a(w)$ die Anzahl der as in einem Wort w ($a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$). Beweisen Sie: Für jedes Palindrom $p \in P$ gerader Länge und jedes $a \in \Sigma$ ist $\#_a(p)$ gerade.

b) Der Rückwärtsoperator für Wörter ist wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{array}{rcl} \cdot^R & : & \Sigma^* \to \Sigma^* \\ \varepsilon^R & := & \varepsilon \\ (a \cdot w)^R & := & w^R \cdot a \quad \forall a \in \Sigma, w \in \Sigma^* \end{array}$$

Zeigen Sie, dass alle Palindrome vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}.\, \forall w \in P^n.\, w^R = w.$$

Beweisen Sie falls nötig folgendes Hilfslemma separat.

$$\forall a \in \Sigma.\, \forall w \in \Sigma^*.\, (w \cdot a)^R = a \cdot w^R.$$

Hinweis: In Ihren Beweisen müssen Sie wahrscheinlich eine Verallgemeinerung der vollständigen Induktion verwenden. Angenommen, Sie wollen zeigen, dass das Prädikat P für alle natürlichen Zahlen gilt, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n)$$

Bisher haben Sie im Induktionsschritt immer angenommen, dass das Prädikat Q für n gilt und daraus geschlossen, dass Q auch für $n+1$ gilt. Formal:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\, Q(n) \implies Q(n+1)$$

Ebenfalls gültig ist jedoch eine stärkere Variante, in der Sie annehmen, dass Q bereits für *alle* $m < n + 1$ bewiesen wurde:

$$\forall n \in \mathbb{N}. (\forall m < n + 1. Q(m)) \implies Q(n + 1)$$

Intuitiv lässt sich das wie folgt rechtfertigen: Angenommen, Sie wollen $Q(n)$ für ein bestimmtes n beweisen. Dann gilt nach Induktionsanfang $Q(0)$. Mit Induktionsschritt folgt:

$$(\forall m < 1. Q(m)) \implies Q(1)$$

Da $Q(0)$ bereits gezeigt ist (und es keine anderen $m < 1$ gibt), gilt auch $Q(1)$, und so weiter für alle natürlichen Zahlen bis n.
Weiterhin müssen Sie hier im Induktionsanfang zwei Aussagen beweisen (für $n = 0$ und $n = 1$), entsprechend den zwei Basisfällen der induktiven Definition von P^n.
Nebenbemerkung: Der Beweis in b) wäre trivial, wenn man Palindrome über ihre charakteristische Eigenschaft definieren würde:

$$P^n := \{w \in \Sigma^n \mid w^R = w\}$$

Dann wäre der Beweis für a) allerdings wesentlich schwieriger, weil man erst beweisen müsste, dass die Palindrome eine bestimmte Struktur haben.

Aufgabe 2: Turingmaschinen 2+3+3+2 Punkte

a) Konstruieren Sie folgende Turingmaschinen:

   i) $\mathcal{M}_i$, sodass die von $\mathcal{M}_i$ berechnete Funktion $f_{\mathcal{M}_i}$ die Addition auf den natürlichen Zahlen in Unärdarstellung ist. Geben Sie die Transitionsfunktion δ als Tabelle an. Markieren Sie dabei den Startzustand und die akzeptierenden Zustände.

   Die natürlichen Zahlen in Unärdarstellung sind die Sprache Σ^* über dem Alphabet $\Sigma := \{|\}$. Dabei entspricht die Anzahl der Striche der dargestellten Zahl. Beispiele sind $\varepsilon \equiv 0$, $| \equiv 1$ und $||| \equiv 3$.

   Beispiele für die Anwendung der von $\mathcal{M}_i$ berechneten Funktion $f_{\mathcal{M}_i}$:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{M}_i}(|\#) &= | \\ f_{\mathcal{M}_i}(||\#|) &= ||| \end{aligned}$$

   Dabei trennt das Zeichen # die zwei Funktionsargumente, d.h. wenn $1 + 2$ berechnet werden soll, ist der Bandinhalt in der Anfangskonfiguration

$$\llcorner\!\lrcorner \ldots \llcorner\!\lrcorner|\#||\llcorner\!\lrcorner \ldots \llcorner\!\lrcorner$$

   ii) $\mathcal{M}_{ii}$, sodass die von $\mathcal{M}_{ii}$ erkannte Sprache $L(\mathcal{M}_{ii}) := \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$ ist. Dabei bezeichnet $\#_a(w)$ wie oben die Anzahl der as in w. Geben Sie ein Flussdigramm (s. Hinweis) an. Verwenden Sie einen Übergang in die spezielle TM success, um zu signalisieren, dass ein Wort erkannt wurde.

iii) $\mathcal{M}_{iii}$, sodass die von $\mathcal{M}_{iii}$ berechnete Funktion $f_{\mathcal{M}_{iii}}$ der Dekrementoperator auf den natürlichen Zahlen in Binärdarstellung ist. Geben Sie ein Flussdiagramm (s. Hinweis) an.

Beispiele:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{M}_{iii}}(0000) &= 0000 \\ f_{\mathcal{M}_{iii}}(0001) &= 0000 \\ f_{\mathcal{M}_{iii}}(0010) &= 0001 \end{aligned}$$

Beschreiben Sie außerdem jeweils kurz die Funktionsweise der von Ihnen konstruierten Turingmaschine.

b) Zeigen Sie, dass für Ihre in a.i) definierte Turingmaschine gilt:

$$f_i(|\#||) = |||.$$

Hinweise:

- Um zu zeigen, dass eine Turingmaschine ein bestimmtes Wort berechnet, argumentieren Sie mit der reflexiven transitiven Hülle der Schrittrelation $\vdash$, $\vdash^*$.
- **(Flussdiagrammdarstellung von Turingmaschinen)**

  Um die Übergangsfunktion von Turingmaschinen (TM) kompakt darzustellen, führen wir sogenannte Flussdiagramme ein. Mit diesen lassen sich komplexe TMn aus einfacheren zusammensetzen. Dabei gibt es folgende Übergänge zwischen TMn:

  (a) $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{a} \mathcal{M}_2$ ist die TM, die zunächst die Teil-TM $\mathcal{M}_1$ ausführt. Hält $\mathcal{M}_1$ auf einem Feld mit dem Symbol $a \in \Gamma$ an, so wird anschließend $\mathcal{M}_2$ ausgeführt.

  (b) $\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ ist die TM, die zunächst die Teil-TM $\mathcal{M}_1$ ausführt. Hält $\mathcal{M}_1$, so wird anschließend $\mathcal{M}_2$ ausgeführt.

  (c) $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$ ist eine Abkürzung für $\mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$.

  (d) $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\neq a_1,\ldots,\neq a_k} \mathcal{M}_2$ ist die TM, die zunächst die Teil-TM $\mathcal{M}_1$ ausführt. Hält $\mathcal{M}_1$ auf einem Feld mit dem Symbol b und ist $b \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$ ($\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \Gamma$), so wird anschließend $\mathcal{M}_2$ ausgeführt.

  Vorausgesetzt ist dabei, dass die Teil-TMn $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ jeweils genau einen Endzustand haben. Außerdem wird in jedem Flussdiagramm genau eine TM durch einen eingehenden Pfeil als Start-TM gekennzeichnet.

  TMn können auch Übergänge zu mehreren TMn haben, aber diese müssen sich gegenseitig ausschließen. Zum Beispiel ist folgendes Flussdiagramm nicht erlaubt:

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{M}_2 \\ {} \arrow[r] & \mathcal{M}_1 \arrow[ur, "= a"] \arrow[dr] & \\ & & \mathcal{M}_3 \end{tikzcd}$$

Hier ist unklar, welche TM ausgeführt werden soll, wenn $\mathcal{M}_1$ auf einem Feld mit Symbol a hält.

Übergänge können auch Schleifen sein, d.h. eine Turingmaschine kann wieder sich selbst starten, wenn sie hält.

Wir definieren drei elementare Turingmaschinen, die grundlegende Funktionen zur Verfügung stellen. Sei dazu $\Gamma := \{a_0, \ldots, a_n\}$ ein Bandalphabet mit beliebigen Zeichen.

- Kleine Rechtsmaschine r: geht einen Schritt nach rechts und hält.
  Übergangsfunktion in Tabellendarstellung:

$$\begin{array}{lcc|ccc} r & z_0 & a_0 & z_e & a_0 & R \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & z_0 & a_n & z_e & a_n & R \end{array}$$

- Kleine Linksmaschine l: analog zur Kleinen Rechtsmaschine.
- Druckmaschine P_a für $a \in \Gamma$: schreibt das Symbol a auf das Band und hält.
  Übergangsfunktion in Tabellendarstellung:

$$\begin{array}{lcc|ccc} P_a & z_0 & a_0 & z_e & a & N \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & z_0 & a_n & z_e & a & N \end{array}$$

Auf Basis dieser TMn können wir mit Flussdiagrammen weitere definieren. Beispiele:

- Große Rechtsmaschine R: geht einen Schritt nach rechts und anschließend so lange weiter nach rechts, bis sie ein Leerzeichen liest.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & r \arrow[loop above, "\neq \textvisiblespace"] \end{tikzcd}$$

- Große Linksmaschine L: analog zur Großen Rechtsmaschine.
- Maschine zum linksseitigen Anfügen addl_a ($a \in \Gamma$): geht bis zum ersten Leerzeichen nach links und ersetzt dieses durch a.

$$\longrightarrow L \longrightarrow P_a$$

Sie dürfen in Ihren Flussdiagrammen alle hier definierten TMn verwenden.