ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann
Manuel Geffken

27.11.2015

5. Übungsblatt, Aufgabe 6 zur Vorlesung
Theoretische Informatik
Mit Lösungsskizze

Aufgabe 6: Abgeschlossenheit Regulärer Sprachen

4 Bonuspunkte

Sei Σ ein Alphabet und seien $a_1, a_2, \ldots a_n \in \Sigma$. Sei L eine Sprache über Σ.
Die Operation F ist auf Wörtern wie folgt definiert.

$$F(a_1a_2\ldots a_n) = a_1a_3\ldots a_m \qquad \text{wobei} \begin{cases} m = n-1 & \text{falls } n > 0 \land n \text{ gerade,} \\ m = n & \text{sonst.} \end{cases}$$

D.h. jeder zweite Buchstabe wird gelöscht. Insbesondere gilt $F(\varepsilon) = \varepsilon$.
Auf Sprachen ist F wie folgt definiert.

$$F(L) = \{F(w) \mid w \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen unter F abgeschlossen sind. Das heißt, wenn L regulär ist, dann ist auch $F(L)$ regulär.

.... Lösungsskizze ....

Extrahiere induktive Definition von $F : \Sigma^* \to \Sigma^*$, die später im Beweis nützlich ist.

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= \varepsilon \\ F(a_1) &= a_1 \\ F(a_1a_2w) &= a_1F(w) \end{aligned}$$

Per Induktion über die Länge der Wörter ist obige Definition äquivalent zu der ursprünglichen Definition.

- $F(\varepsilon) = \varepsilon$ (sofort per Definition)
- $F(a_1) = a_1$ (sofort per Definition)
- Sei $w = a_3\ldots a_n$.

  $$\begin{aligned} F(a_1a_2w) &= a_1a_3\ldots a_m \qquad \text{wobei} \begin{cases} m = n-1 & \text{falls } n > 0 \land n \text{ gerade,} \\ m = n & \text{sonst.} \end{cases} \\ &\overset{I.V.}{=} a_1F(w) \end{aligned}$$

Da L regulär ist, existiert ein NEA $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, \mathcal{F})$, so dass $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = L$. Wir konstruieren einen NEA $\mathcal{B}' = (Q', \Sigma', \Delta', q'_0, \mathcal{F}')$ wie folgt. Sei $\tilde{Q}$ eine Zustandsmenge, so dass $Q \cap \tilde{Q} = \emptyset$, $|\tilde{Q}| = |Q|$ und $\tilde{f} : Q \to \tilde{Q}$ eine Bijektion.

$$Q' = Q \cup \tilde{Q}, \Sigma' = \Sigma, q'_0 = q_0, \mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{\tilde{f}(q) \mid q \in \mathcal{F}\}$$

und

$$(q, a, q'') \in \Delta' \iff (q, a, q') \in \Delta \text{ und } (q', a', q'') \in \Delta \tag{1}$$

$$(q, a, \tilde{f}(q')) \in \Delta' \iff (q, a, q') \in \Delta \tag{2}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{L}(\mathcal{B}') = F(L)$. Wir zeigen beide Richtung der Inklusion getrennt.
Fall $\mathcal{L}(\mathcal{B}') \supseteq \{F(w) \mid w \in L\}$: Zu zeigen ist $\forall w \in L : F(w) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}')$. Wir zeigen, dass für alle $q \in Q$ und für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $(q, w, q') \in \Delta^* \implies (q, F(w), q'') \in \Delta'^*$ und $q' \in \mathcal{F} \iff q'' \in \mathcal{F}'$. Beweis per Induktion über die Länge von w.

- Fall $w = \varepsilon$: Es gilt $(q, \varepsilon, q) \in \Delta^*$. Mit $F(w) = \varepsilon, \mathcal{F}' \cap Q = \mathcal{F}$ und $(q, \varepsilon, q) \in \Delta'^*$ folgt $(q, F(w), q) \in \Delta'^*$ und $q \in \mathcal{F} \iff q \in \mathcal{F}'$.

- Fall $w = a$: Es gilt $(q, a, q') \in \Delta^*$. Das bedeutet, dass $(q, a, q') \in \Delta$. Also ist laut (2) $(q, a, \tilde{f}(q')) \in \Delta'$ und $q' \in \mathcal{F} \iff \tilde{f}(q') \in \mathcal{F}'$.

- Fall $w = aa'w' \in L$: Es gilt $(q, aa'w', q') \in \Delta^*$. Das bedeutet, dass $(q, a, q'') \in \Delta$, $(q'', a', q''') \in \Delta$ und $(q''', w, q') \in \Delta^*$. Mit (1) folgt $(q, a, q''') \in \Delta'$. Laut I.V. folgt $(q''', F(w), q'''') \in \Delta'^*$, so dass $q' \in \mathcal{F} \iff q'''' \in \mathcal{F}'$ und damit $(q, aF(w), q'''') \in \Delta'^*$, so dass $q' \in \mathcal{F} \iff q'''' \in \mathcal{F}'$. Also gilt $(q, F(aa'w), q'''') \in \Delta'^*$, so dass $q' \in \mathcal{F} \iff q'''' \in \mathcal{F}'$.

Mit $q'_0 = q_0$ folgt $\mathcal{L}(\mathcal{B}') \supseteq F(L)$.
Fall $\mathcal{L}(\mathcal{B}') \subseteq \{F(w) \mid w \in L\}$: Zu zeigen ist $\forall w \in \mathcal{L}(\mathcal{B}') : \exists w' \in L : F(w') = w$. Wir zeigen, dass für alle $q \in Q$ und für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $(q, w, q'') \in \Delta'^* \implies \exists w' \in \Sigma^* : (q, w', q') \in \Delta^*$, $F(w') = w$ und $q' \in \mathcal{F} \iff q'' \in \mathcal{F}'$. Beweis per Induktion über die Länge von w.

- Fall $F(w') = \varepsilon$: Es gilt $(q, \varepsilon, q) \in \Delta'^*$. Mit $w = \varepsilon, \mathcal{F}' \cap Q = \mathcal{F}$ und $(q, \varepsilon, q) \in \Delta^*$ folgt $\exists w' \in \Sigma^* : (q, w', q) \in \Delta^*$ und $q \in \mathcal{F} \iff q \in \mathcal{F}'$.

- Fall $F(w') = a$: Es gilt $(q, a, q') \in \Delta'^*$ also $(q, a, q') \in \Delta'$. Nach (1) und (2) gilt $q' \in Q$ oder $q' \notin Q$ ($q' \in \tilde{Q}$).

  - $q' \in Q$: Es folgt $(q, a, q'') \in \Delta$ und $(q'', a', q') \in \Delta$. Folglich existiert ein Wort $aa' \in \Sigma^*$, so dass $(q, aa', q') \in \Delta^*$. Mit $\mathcal{F}' \cap Q = \mathcal{F}$ folgt $q' \in \mathcal{F} \iff q' \in \mathcal{F}'$.
  - $q' \in \tilde{Q}$: Es folgt $(q, a, \tilde{f}^{-1}(q')) \in \Delta$. Folglich existiert ein Wort $a \in \Sigma^*$, so dass $(q, a, \tilde{f}^{-1}(q')) \in \Delta^*$. Mit $\tilde{f}(q) \in \mathcal{F}' \cap \tilde{Q} \iff q \in \mathcal{F}$ folgt $\tilde{f}^{-1}(q') \in \mathcal{F} \iff q' \in \mathcal{F}'$.

- Fall $F(w') = aa'w''$: Es gilt $(q, aa'w'', q') \in \Delta'^*$ also nach (1) und (2) $(q, a, q'') \in \Delta'$ und $(q'', a', q''') \in \Delta'$ mit $q'' \in Q$ (denn es gilt $\neg(\exists q'' \in \tilde{Q} : \exists a' \in \Sigma : \exists q''' \in Q' : (q'', a', q''') \in \Delta'))$ und $(q''', w'', q') \in \Delta'^*$. Weiterhin gilt $(q'', a'w'', q') \in \Delta'^*$. Laut I.V. existiert $w''' \in \Sigma^*$, so dass $(q'', w''', q'''') \in \Delta^*$ mit $F(w''') = a'w''$ und $q'''' \in \mathcal{F} \iff q' \in \mathcal{F}'$.

Mit $q'_0 = q_0$ folgt $\mathcal{L}(\mathcal{B}') \subseteq F(L)$. $\square$