ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann
Manuel Geffken

11.12.2015
Abgabe bis spätestens Freitag 18.12.2015, 10 Uhr
in die Briefkästen in Gebäude 51

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Entscheidungsverfahren für reguläre Sprachen — 2+2 Punkte

Geben Sie zwei Entscheidungsverfahren für folgendes Problem an. Begründen Sie jeweils die Korrektheit Ihres Verfahrens.

$$\text{Seien } \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs. Ist } \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)^R?$$

(a) Verwenden Sie in Ihrer Lösung den Rückwärtsoperator auf regulären Ausdrücken $\cdot^R : \mathrm{RE}(\Sigma) \to \mathrm{RE}(\Sigma)$ (siehe 6. Übungsblatt).

(b) Verwenden Sie in Ihrer Lösung ε-NFAs, eine Variante von NFAs. Diese Automaten zeichnen sich dadurch aus, dass Transitionen nicht nur mit Symbolen $a \in \Sigma$ beschriftet sein können, sondern auch mit $\varepsilon \notin \Sigma$. Intuitiv kann ein Übergang zwischen zwei Zuständen, die durch eine mit ε beschriftete Transition verbunden sind, stattfinden, ohne dabei ein Zeichen aus dem Eingabewort zu lesen.

Formell hat ein ε-NFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0^0, F)$ eine Transitionsfunktion

$$\delta \colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q.$$

Ein Lauf eines ε-NFAs auf einem Wort $w := a_1 \dots a_n$ ist eine Folge von Zuständen

$$(q_0^0, \dots, q_0^{m_0}, \dots, q_n^0, \dots q_n^{m_n}) \quad (n, m_i \in \mathbb{N})$$

sodass gilt:

$$\forall 0 \le i < n.\ q_{i+1}^0 \in \delta(q_i^{m_i}, a_i).$$
$$\forall 0 \le i \le n, 0 \le j < m_i.\ q_i^{j+1} \in \delta(q_i^j, \varepsilon).$$

Alles Weitere ist analog zu normalen NFAs definiert.

Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass es ein Verfahren gibt, mit dem jeder ε-NFA $\mathcal{A}$ in einen NFA $\mathcal{A}'$ umgewandelt werden kann, sodass $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen in Ihren Verfahren alle Algorithmen aus der Vorlesung verwenden.

Aufgabe 2: Kontextfreie Grammatik 1 Punkt

Betrachten Sie die Grammatik $G := (N, T, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} N &:= \{S, T, V, F, P\} \\ T &:= \{\forall, ., (,), \wedge, \vee, \neg, x, y, f, g, p, q\} \end{aligned}$$

und den folgenden Produktionen P:

$$\begin{aligned} &S \to \forall V.S \\ &S \to \exists V.S \\ &S \to (S \wedge S) \\ &S \to (S \vee S) \\ &S \to \neg S \\ &S \to P(T) \\ &T \to V \\ &T \to F(T) \\ &V \to x \mid y \\ &F \to f \mid g \\ &P \to p \mid q \end{aligned}$$

Dabei ist $A \to X \mid Y$ eine Kurzschreibweise für die beiden Produktionen $A \to X$ und $A \to Y$.
Geben Sie einen Ableitungsbaum für folgendes Wort an:

$$\forall x.\ (p(x) \wedge p(f(x)))$$

Aufgabe 3: Chomsky-Normalform 1+3 Punkte

Wir betrachten die Grammatik $G := (N, T, P, S)$ mit $N := \{S, A, B, C, D\}$, $T := \{a, b\}$ und den folgenden Produktionen P:

$$\begin{aligned} &S \to \varepsilon, \\ &S \to aB,\ \ S \to bA, \\ &A \to bAA,\ \ B \to aBB, \\ &A \to C,\ \ B \to D, \\ &C \to aS,\ \ D \to bS \end{aligned}$$

(a) Welche Sprache L wird von G erzeugt? Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung für L an. (Ein Beweis für $L = \mathcal{L}(G)$ ist nicht nötig.)

(b) Geben Sie eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform an, sodass $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Verwenden Sie dazu den Algorithmus aus der Vorlesung, d.h. führen Sie folgende Schritte durch:

(i) Separieren Sie Terminal- und Nichtterminalsymbole, sodass Terminalsymbole nur noch auf der rechten Seite von Produktionen der Form $A \to a$ ($A \in N, a \in T$) vorkommen.

(ii) Eliminieren Sie ε-Regeln.

(iii) Eliminieren Sie Kettenregeln.

(iv) Stellen Sie sicher, dass die rechte Seite jeder Produktion aus genau einem Terminal- oder genau zwei Nichtterminalsymbolen besteht.

Aufgabe 4: Pumping Lemma über einelementigem Alphabet 3 Punkte

Sei L eine Sprache über $\Sigma := \{a\}$. Angenommen, es gibt einen Beweis mit dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen (PLR), der beweist, dass L nicht regulär ist. Zeigen Sie mit dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen (PLK), dass L auch nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 5: Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen 4 Punkte

Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen, dass folgende Sprache nicht kontextfrei ist:

$$L := \{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^* \mid i, j, k \in \mathbb{N}; k = \max(i, j)\}.$$