ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann
Manuel Geffken

08.01.2016
Abgabe bis spätestens Freitag 15.01.2016, 10 Uhr
in die Briefkästen in Gebäude 51

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Kellerautomat für eine Sprache 2 Punkte

Konstruieren Sie einen Kellerautomaten $K := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der die folgende kontextfreie Sprache L erkennt.

$$L := \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Geben Sie jede Komponente der Struktur K an. Stellen Sie die Transitionsrelation δ durch ein Zustandsdiagramm dar. Ein Beispieldiagramm findet sich in Aufgabe 3.

Aufgabe 2: Top des Kellers 4 Punkte

Zeigen Sie, dass für jeden Kellerautomaten $K := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ Folgendes gilt.

$$\begin{aligned}&\forall w \in \Sigma; q, q' \in Q; Z \in \Gamma; \gamma \in \Gamma^*.\\ &(q, Z) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \varepsilon) \implies\\ &(q, Z\gamma) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \gamma).\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\overset{w}{\Rightarrow} := \{((q, \gamma), (q', \gamma')) \mid (q, wv, \gamma) \vdash^* (q', v, \gamma');\ q, q' \in Q;\ \gamma, \gamma' \in \Gamma^*;\ w, v \in \Sigma^*\}.$$

Hinweis: Es ist leichter, die folgende allgemeinere Behauptung zu zeigen.

$$\begin{aligned}&\forall w \in \Sigma^*; q, q' \in Q; \gamma, \hat{\gamma} \in \Gamma^*.\\ &(q, \hat{\gamma}) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \varepsilon) \implies\\ &(q, \hat{\gamma}\gamma) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \gamma).\end{aligned}$$

($\implies$ steht für die logische Implikation.)

Aufgabe 3: Kontextfreie Grammatiken und Kellerautomaten 2+3 Punkte

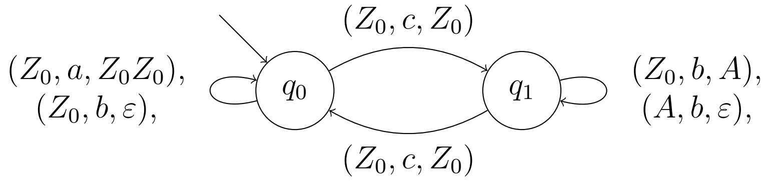
(a) Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G := (N, T, P, S)$ mit Nichterminalsymbolen $N := \{S, A, B\}$, Terminalsymbolen $T := \{a, b, c\}$, Startsymbol S und den folgenden Produktionen:

$$
\begin{aligned}
P := \{ & S \to Aa, \\
& S \to Bc, \\
& A \to aaAb, \\
& A \to a, \\
& B \to aBb, \\
& B \to aA, \\
& B \to \varepsilon \}.
\end{aligned}
$$

Konstruieren Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{K}$, sodass $L(\mathcal{K}) = L(G)$ gilt. Verwenden Sie dazu das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren.

Geben Sie für Ihren Kellerautomaten eine akzeptierende Abarbeitung (als Folge von Konfigurationen) des Wortes *aaabc* an.

(b) Gegeben sei der Kellerautomat $\mathcal{K} := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma := \{a, b, c\}$; $Q := \{q_0, q_1\}$; $\Gamma := \{Z_0, A\}$; und δ wie im folgenden Zustandsdiagramm dargestellt:



Dabei existiert ein Übergang der Form $q \xrightarrow{(Z, a, \beta)} q'$ bzw. $q \xrightarrow{(Z, \epsilon, \beta)} q'$ im Zustandsdiagramm genau dann wenn $(q', \beta) \in \delta(q, a, Z)$ bzw. $(q', \beta) \in \delta(q, \epsilon, Z)$.

Konstruieren Sie eine Grammatik G, sodass $L(G) = L(\mathcal{K})$ gilt. Verwenden Sie dazu das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren.

Geben Sie eine Ableitung für das Wort *acbbcb* in Ihrer Grammatik an.

Aufgabe 4: Kellerautomaten mit einem Zustand 1 Punkt

Zeigen Sie: Zu jedem Kellerautomaten $\mathcal{K}$ gibt es einen Kellerautomaten $\mathcal{K}'$ mit nur einem Zustand, der die gleiche Sprache erkennt (d.h. $L(\mathcal{K}) = L(\mathcal{K}')$).

Aufgabe 5: Kellerautomaten mit Finalzuständen 3 Punkte

Kellerautomaten können mit Finalzuständen analog zu DFAs und NFAs versehen werden. Wir nennen diese zur Unterscheidung F-Kellerautomaten und definieren:
Ein F-Kellerautomat ist eine Struktur $\mathcal{K} := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ mit der Finalzustandsmenge $F \subseteq Q$. Alle anderen Komponenten sowie die Schrittrelation $\vdash$ sind wie bei gewöhnlichen Kellerautomaten definiert. Die durch $\mathcal{K}$ erkannte Sprache ist

$$L(\mathcal{K}) := \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q', \varepsilon, \gamma);\ q' \in F\}.$$

Zeigen Sie: F-Kellerautomaten erkennen genau die kontextfreien Sprachen.

Hinweis: Das Akzeptanzkriterium für die erkannte Sprache ist zwar dasselbe wie bei *deterministischen* Kellerautomaten, aber in dieser Aufgabe sind trotzdem *nicht-deterministische* Kellerautomaten gemeint.