Informatik 3
Theoretische Informatik
WS 2015/16

Prof. Dr. Peter Thiemann
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik

Name: ________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

- **Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Blatt**.
- Es sind **keine Hilfsmittel** wie Skripte, Bücher, Notizen oder Taschenrechner erlaubt. Desweiteren sind alle elektronischen Geräte (wie z.B. Handys) auszuschalten.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie **90 Minuten** Zeit.
- Benutzen Sie zur Bearbeitung der Aufgaben jeweils den Platz unterhalb der Aufgaben sowie ggf. den Platz auf der Rückseite.
- Falls Sie mehrere Lösungsansätze einer Aufgabe erarbeiten, markieren Sie deutlich, welcher gewertet werden soll.

	Erreichbare Punkte	**Erzielte Punkte**	**Nicht bearbeitet**
Kurzfragen	28		
Aufgabe 1	17		
Aufgabe 2	12		
Aufgabe 3	15		
Aufgabe 4	10		
Aufgabe 5	21		
Gesamt	103		

Kurzfragen. (insgesamt 28 Punkte)

Der erste Teil der Klausur besteht aus 8 Kurzfragen. **Geben Sie für alle "Richtig oder falsch?"-Fragen eine kurze Begründung an**, z.B. Verweise auf Sätze aus der Vorlesung, Zustandsdiagramme von Automaten, Beweisidee oder Angabe eines Gegenbeispiels.

(F1) (a) Wie ist ein deterministischer endlicher Automat (DFA) definiert?

(b) Wie ist ein *nicht*-deterministischer endlicher Automat (NFA) definiert?

4 P.	

(F2) Geben Sie einen regulären Ausdruck für folgende Sprachen an

(a) $L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \text{ enthält } ab\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \text{ enthält nicht } ab\}$

3 P.	

(F3) Wie lautet das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen?

3 P.	

(F4) (a) Geben Sie eine Sprache an, die Typ-2, aber nicht Typ-3 ist.

(b) Geben Sie eine Sprache an, die Typ-1, aber nicht Typ-2 ist.

(c) Geben Sie eine Sprache an, die kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei ist.

Hinweis: Es ist kein formaler Beweis gefordert.

3 P.	

Zusätzlicher Platz für Kurzfragen:

(F5) (a) Wie ist ein (nicht-deterministischer) Kellerautomaten (PDA) definiert, der mit leerem Keller akzeptiert?

(b) Geben Sie die Menge aller Konfigurationen eines PDA an.

(c) Wie ist die Schritt-Relation $\vdash$ für Kellerautomaten definiert?

(d) Welche Sprache wird von einem PDA per leerem Keller akzeptiert?

6 P.	

(F6) (a) Wie ist ein *deterministischer* Kellerautomat (DPDA) definiert?

(b) Welche Sprache wird von einem DPDA per Endzustand akzeptiert?

3 P.	

Zusätzlicher Platz für Kurzfragen:

(F7) Zeigen Sie, dass die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen (DCFL), *nicht* unter Vereinigung $\cup$ abgeschlossen ist.
Sie dürfen alle anderen in der Vorlesung besprochenen Abgeschlossenheitseigenschaften benutzen.

2 P.	

(F8) Eine Sprache L erfüllt die Präfix-Bedingung, wenn kein Wort in L ein *echtes Präfix*[1] von einem anderen Wort in L ist.

Begründen Sie, dass die von einem *deterministischen* Kellerautomaten $\mathcal{K}$ per leerem Keller erkannte Sprache $L_\varepsilon(\mathcal{K})$ die Präfix-Bedingung erfüllt.

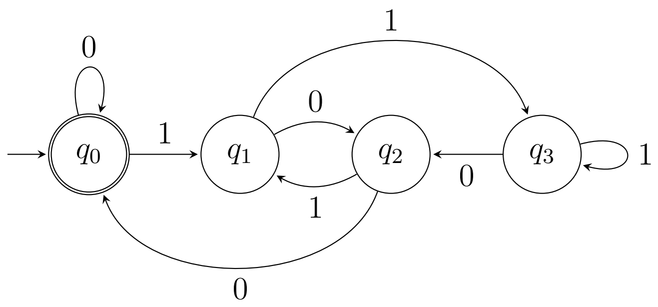
4 P.	

[1]Ein Präfix eines Wortes, das nicht identisch mit ihm ist, wird *echtes Präfix* genannt.

Zusätzlicher Platz für Kurzfragen:

Aufgabe 1 (17 Punkte).

Betrachten sie den folgenden Deterministischen Endlichen Automaten $\mathcal{M}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.



(a) Minimieren Sie den DFA $\mathcal{M}$.

(b) Geben Sie die Nerode-Äquivalenzklassen von $L(\mathcal{M})$ an.

(c) Geben Sie einen regulären Ausdruck r an, so dass $L(\mathcal{M}) = [\![r]\!]$.

(d) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der von $\mathcal{M}$ erkannten Sprache $L(\mathcal{M})$ an.

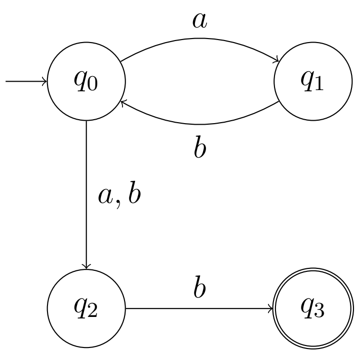
Hinweis: Interpretieren Sie ein Wort über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ als Binärdarstellung einer natürlichen Zahl.

(e) Geben Sie einen DFA $\mathcal{M}_6$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ als Zustandsdiagramm an, sodass $\mathcal{M}_6$ die Dezimaldarstellung aller natürlichen Zahlen, welche ohne Rest durch 6 teilbar sind, akzeptiert.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (12 Punkte)**.**

Sei K der durch folgendes Zustandsdiagramm gegebene NFA:



Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion, um einen DFA K' mit $L(K') = L(K)$ zu konstruieren. Geben Sie alle Zwischenschritte der Konstruktion sowie K' als Zustandsdiagramm an. Unerreichbare Zustände von K' müssen Sie sowohl bei der Konstruktion als auch im Endergebnis nicht angeben.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (15 Punkte).

Gegeben sei die Grammatik $\mathcal{G} = (\{S, D, L\}, \{a\}, P, S)$ mit den Produktionen P:

$$S \to SD \qquad aD \to Daa \qquad L \to \varepsilon$$
$$SD \to LaD \qquad LD \to L$$

(a) Lässt sich das Wort a^{2^3} aus dem Startsymbol S ableiten? Wenn ja, dann geben Sie eine Ableitung für das Wort a^{2^3} an.

(b) Welchem Chomsky-Typ entspricht diese Grammatik?

(c) Welche Sprache wird durch die Grammatik erzeugt?

(d) Welchem Chomsky-Typ entspricht die erzeugte Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**

Sei Σ ein Alphabet mit $|\Sigma| \geq 2$. Zeigen Sie mit dem Pumping Lemma, dass die Sprache $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ nicht kontextfrei ist.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (21 Punkte)**.**

Sei $G_1 := (\{S, A, B, C\}, \{0, 1\}, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit Produktionen P wie folgt:

$$\begin{aligned}
S &\to AB \mid B0 \\
A &\to \varepsilon \mid C \mid 0 \\
B &\to 00 \mid 1 \mid 0CB \\
C &\to A
\end{aligned}$$

(a) Lässt sich in G_1 das leere Wort ableiten?

(b) Formen Sie G_1 in Chomsky-Normalform (CNF) um. Dokumentieren Sie jeden Schritt des Verfahrens: (1) Separation, (2) ε-Elimination, (3) Kettenregel-Elimination sowie (4) Kürzen der rechten Seiten.

Betrachten Sie nun die Grammatik $G_2 := (\{S, A, B, C, D\}, \{0, 1\}, P, S)$ in CNF. Die Menge der Produktionen P lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
S &\to AB \mid BC \mid BD \\
A &\to BA \mid 0 \\
B &\to DD \mid DC \mid CC \mid 1 \\
C &\to AB \\
D &\to 0
\end{aligned}$$

(c) Prüfen Sie mithilfe des CYK-Algorithmus nach, ob das Wort 110100 in $\mathcal{L}(G_2)$ ist.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 5: