Informatik 3
Theoretische Informatik
WS 2016/17

Prof. Dr. Peter Thiemann
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik

Name: ________________________

Übungsgruppe: ________________________

- **Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppennummer auf jedes Blatt**.
- **Verwenden Sie ein Schreibgerät mit dokumentenechter schwarzer oder blauer Schrift (in der Regel Kugelschreiber). Kein Bleistift!**
- Es sind **keine Hilfsmittel** wie Skripte, Bücher, Notizen oder Taschenrechner erlaubt. Alle elektronischen Geräte (wie z.B. Handys) sind auszuschalten.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie **90 Minuten** Zeit.
- Benutzen Sie zur Bearbeitung der Aufgaben jeweils den Platz unterhalb der Aufgaben sowie ggf. den Platz auf der Rückseite. Weiteres Papier erhalten Sie von der Aufsicht.
- Falls Sie mehrere Lösungsansätze einer Aufgabe erarbeiten, markieren Sie deutlich, welcher gewertet werden soll.

	Erreichbare Punkte	**Erzielte Punkte**
Kurzfragen	6	
Aufgabe 1	9	
Aufgabe 2	9	
Aufgabe 3	9	
Aufgabe 4	9	
Aufgabe 5	6	
Gesamt	48	

Kurzfragen. (6 Punkte)

Der erste Teil der Klausur besteht aus Kurzfragen nach Definitionen.

(F1) Geben Sie die Definition der *Länge* eines Wortes, $|\cdot| : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, an.

(F2) Geben Sie die Definition der *Konkatenation* von zwei Worten, $\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$, an.

(F3) Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA. Wann *akzeptiert* A ein Wort $w \in \Sigma^*$? Geben Sie die genaue Definition an.

(F4) Sei $R : \Sigma^* \times \Sigma^*$ eine Äquivalenzrelation über Wörtern aus dem Alphabet Σ. Wann ist R *rechtsinvariant*? Geben Sie die genaue Definition an.

(F5) Geben Sie *Ardens Lemma* wieder.

(F6) Wann ist ein Problem *entscheidbar*?

(F7) Wie ist das *Endlichkeitsproblem* für Sprachen definiert?

Zusätzlicher Platz für Kurzfragen:

Aufgabe 1 (Induktion). (9 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Lemma:

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA. Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\forall q \in Q, w' \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w), w') = \hat{\delta}(q, w \cdot w')$$

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (Endliche Automaten). (9 Punkte)

Ein MS-NEA („Multi-Start-NEA") ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$. Der einzige Unterschied zum NEA ist, dass ein MS-NEA eine Menge von *initialen Zuständen* $Q_0 \subseteq Q$ hat (anstatt genau einen initialen Zustand q_0). Es gelten folgende Definitionen:

Ein *Lauf* des MS-NEA A auf dem Wort $w = a_1 \dots a_n$ ist eine Folge von Zuständen $q_0 q_1 \dots q_n$ so dass

- $q_0 \in Q_0$
- für alle $1 \leq i \leq n$: $q_i \in Q$ und $q_i \in \delta(q_{i-1}, a_i)$.

Ein solcher Lauf von A ist *akzeptierend* wenn $q_n \in F$.

Die *Sprache* $L(A)$ eines MS-NEAs A ist definiert als:

$$L(A) = \{w \mid \text{es existiert ein akzeptierender Lauf von } A \text{ auf } w\}$$

Geben Sie an, wie man für einen beliebigen MS-NEA A einen NEA A' konstruieren kann, so dass $L(A) = L(A')$. Begründen Sie kurz die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (Pumping Lemma). (9 Punkte)

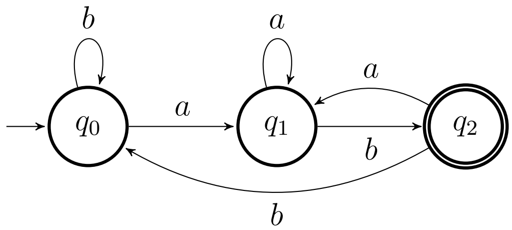
Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die folgende Sprache über $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$ nicht regulär ist.

$$L = \{\texttt{a}^n\texttt{b}\texttt{a}^n\texttt{b} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (Reguläre Ausdrücke). (9 Punkte)

Wenden Sie das im Beweis des Satzes von Kleene vorgestellte Verfahren an, um einen regulären Ausdruck zu bestimmen, der die Sprache beschreibt, die von folgendem DFA akzeptiert wird.



Zusätzlicher Platz für Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (Abschlusseigenschaften). (6 Punkte)

(a) Seien L_1 und L_2 reguläre Sprachen. Sei L die Sprache der Worte, die in *genau einer* der beiden Sprachen L_1 und L_2 vorkommen. Zeigen Sie, dass L ebenfalls regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen unter der Operation „$\bullet$" abgeschlossen sind.

$$L_1 \bullet L_2 := \{w \mid x, y \in \Sigma^*, wx \in L_1, wy \in L_2\}$$

Hinweis: Zeigen Sie diese Abschlusseigenschaften, indem Sie sich auf Ergebnisse aus Vorlesung und Übung beziehen.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 5: