P. Thiemann, S. Wehr Wintersemester 2006/2007

Compilerbau

http://proglang.informatik.uni-freiburg.de/teaching/compilerbau/2006ws/

Übungsblatt 2

Musterlösung zu Aufgabe 2 (i)

8.11.2006

In der Vorlesung wurde die Ableitung eines regulären Ausdrucks $r \in RE(\Sigma)$ bezüglich eines Symbols $a \in \Sigma$ als Funktion $D : RE(\Sigma) \times \Sigma \to RE(\Sigma)$ zusammen mit einer Hilfsfunktion $E : RE(\Sigma) \to RE(\Sigma)$ definiert. Zeige die Gleichheit $L(E(r)) = L(r) \cap \{\epsilon\}$.

Beweis.
Der Beweis erfolgt durch strukturelle Induktion über den Aufbau der regulären Ausdrücke.

Fall $r = \underline{\emptyset}$: Dann gilt $L(E(\underline{\emptyset})) = \emptyset = L(\underline{\emptyset}) \cap \{\varepsilon\}$.

Fall $r = \underline{\varepsilon}$: Dann gilt $L(E(\underline{\varepsilon})) = \{\varepsilon\} = L(\underline{\varepsilon}) \cap \{\varepsilon\}$.

Fall $r = \underline{a}$: Dann gilt $L(E(\underline{a})) = \emptyset = L(\underline{a}) \cap \{\varepsilon\}$.

Fall $r = r_1 r_2$: Es gilt:

$$L(E(r_1 r_2)) = L(E(r_1)E(r_2)) = L(E(r_1)) \cdot L(E(r_2)) \quad .$$

Wir können jetzt die Induktionsvoraussetzung auf $L(E(r_1))$ und $L(E(r_2))$ anwenden und erhalten

$$L(E(r_1)) \cdot L(E(r_2)) = (L(r_1) \cap \{\varepsilon\}) \cdot (L(r_2) \cap \{\varepsilon\}) \quad .$$

Offensichtlich gilt

$$(L(r_1) \cap \{\varepsilon\}) \cdot (L(r_2) \cap \{\varepsilon\}) = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{falls } \varepsilon \in L(r_1) \text{ und } \varepsilon \in L(r_r), \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie

$$(L(r_1) \cdot L(r_2)) \cap \{\varepsilon\} = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{falls } \varepsilon \in L(r_1) \text{ und } \varepsilon \in L(r_r), \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt

$$L(E(r_1 r_2)) = (L(r_1) \cdot L(r_2)) \cap \{\varepsilon\} = L(r) \cap \{\varepsilon\} \quad .$$

Fall $r = r_1 | r_2$: Es gilt:

$$L(E(r_1|r_2)) = L(E(r_1)|E(r_2)) = L(E(r_1)) \cup L(E(r_2)) \quad .$$

Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $L(E(r_1))$ und $L(E(r_2))$ liefert

$$L(E(r_1)) \cup L(E(r_2)) = (L(r_1) \cap \{\varepsilon\}) \cup (L(r_2) \cap \{\varepsilon\})$$

und durch einfache Mengenmanipulation folgt schließlich

$$(L(r_1) \cap \{\varepsilon\}) \cup (L(r_2) \cap \{\varepsilon\}) = (L(r_1) \cup L(r_2)) \cap \{\varepsilon\} = L(r) \cap \{\varepsilon\} \quad .$$

Fall [:$r = r_1^*$] Es gilt: $L(E(r_1^*)) = L(\underline{\varepsilon}) = \{\varepsilon\} = L(r_1^*) \cap \{\varepsilon\}$. □