P. Thiemann, L. Fennell

Funktionale Programmierung

http://proglang.informatik.uni-freiburg.de/teaching/functional-programming/2013/

Übungsblatt 9 (Kategorientheorie)

Di, 2013-12-24

Hinweise

- Lösungen sollen in das persönliche Subversion (svn) Repository hochgeladen werden. Die Adresse des Repositories wird per Email mitgeteilt.
- **Alle** Aufgaben müssen bearbeitet und pünktlich abgegeben werden. Falls das sinnvolle Bearbeiten einer Aufgaben nicht möglich ist, kann eine stattdessen eine Begründung abgegeben werden.
- Wenn die Abgabe korrigiert ist, wird das Feedback in das Repository hochgeladen. Die Feedback-Dateinamen haben die Form Feedback-<user>-ex<XX>.txt.
- Allgemeinen Fragen zum Übungsblatt können im Forum (http://proglang.informatik.uni-freiburg.de/forum/viewforum.php?f=38) geklärt werden.

Errata 2014-01-13

- Abgabetermine korrigiert auf 2014-01-16
- Aufgabe 2: Korrektur der Spezifikation von $\mathcal{C}$-Pfeilen
- Aufgabe 3: Korrektur der Aufgabenstellung.
- Aufgabe 7: Hinweis zur Definition von $\langle f, g \rangle$.
- Aufgabe 9: Definition von Koprodukt hinzugefügt

Abgabe: Do, 2014-01-16

Sie können die Aufgaben wahlweise in ihr Repository committen (auch eingescannt oder fotografiert) oder am Donnerstag den 16.1. in der Übungsstunde abgeben.

1. Vervollständigen Sie die folgende Spezifikation der Kategorie $\mathbf{M}$ und zeigen Sie, dass $\mathbf{M}$ die Kategoriengesetze erfüllt.
   - Die Objekte von $\mathbf{M}$ sind die natürlichen Zahlen.
   - Ein $\mathbf{M}$-Pfeil $f : m \to n$ ist eine $m \times n$ Matrix reeller Zahlen.
   - Eine Komposition $g \circ f$ zweier Pfeile $f : m \to n$ und $g : n \to p$ ist ...
   - ...

2. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und A ein Objekt aus $\mathcal{C}$. Die Kategorie $(\mathcal{C} \downarrow A)$ ist folgendermaßen definiert:
   - Die Objekte sind Paare (B, π_B) von $\mathcal{C}$-Objekten B und $\mathcal{C}$-Pfeilen $\pi_B : B \to A$.
   - Die Pfeile $g_{\downarrow A} : (B, \pi_B) \to (B', \pi_{B'})$ sind genau die $\mathcal{C}$-Pfeile $g : B \to B'$ für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & & B' \arrow[dl, "\pi_{B'}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

   Verifizieren Sie, dass $(\mathcal{C} \downarrow A)$ eine Kategorie ist. Wie würden Sie die Pfeile und Objekte der Kategorie $(\mathbf{Set} \downarrow \{0, 1\})$ interpretieren?

3. Zeigen Sie: Wenn zwei komponierbare Pfeile f, g monisch sind, dann ist auch $f \circ g$ monisch. Darüber hinaus, wenn $f \circ g$ monisch ist, dann ist auch g monisch.

4. Geben Sie eine Kategorie mit einem Pfeil an, der episch und monisch, aber kein Isomorphismus ist.

5. Was sind die initialen und terminalen Objekte der folgenden Kategorien?
   - **Set** $\times$ **Set** (die Produktkategorie von **Set** und **Set**
   - $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$

6. Geben Sie eine Kategorie ohne initiale Objekte an. Geben Sie außerdem eine Kategorie ohne terminale Objekte an.

7. Zeigen Sie, dass $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$. Zeichnen Sie erst ein entsprechendes Diagramm. (Für die Definition von $\langle f, g \rangle$, siehe Definition von Produkt)

8. Betrachten Sie zwei Objekte A und B der Kategorie einer partiellen Ordnung $(P, \leq)$. Geben Sie das Produkt $A \times B$, die Projektionen π_1 und π_2 sowie den Pfeil $\langle f, g \rangle$ für zwei Pfeile f und g an.

9. Geben Sie das Koprodukt zweier Objekte der Kategorie **Poset**, sowie die Injektionen und den Pfeil $[f, g]$ für zwei Pfeile f und g an.

   Das folgende Diagramm definiert das Koprodukt $A + B$ zweier Objekte A und B, die Injektionen ι_1 und ι_2, und den Pfeil $[f, g]$ (dual zur Definition von Produkten):

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_1"'] & A + B \arrow[u, dashed, "{[f,g]}"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\iota_2"]
\end{tikzcd}$$

10. Geben Sie ein Beispiel eines Koequalizers in der Kategorie **Set** für zwei beliebige Funktionen f und g.

11. Zeigen Sie, dass jeder epische Equalizer auch ein Isomorphismus ist.