
Funktionale Programmierung

<http://proglang.informatik.uni-freiburg.de/teaching/functional-programming/2013/>

Übungsblatt 9 (Kategorientheorie)

Di, 2013-12-24

Hinweise

- Lösungen sollen in das persönliche Subversion (svn) Repository hochgeladen werden. Die Adresse des Repositories wird per Email mitgeteilt.
- **Alle** Aufgaben müssen bearbeitet und pünktlich abgegeben werden. Falls das sinnvolle Bearbeiten einer Aufgaben nicht möglich ist, kann eine stattdessen eine Begründung abgegeben werden.
- Wenn die Abgabe korrigiert ist, wird das Feedback in das Repository hochgeladen. Die Feedback-Dateinamen haben die Form `Feedback-<user>-ex<XX>.txt`.
- Allgemeinen Fragen zum Übungsblatt können im Forum (<http://proglang.informatik.uni-freiburg.de/forum/viewforum.php?f=38>) geklärt werden.

Errata 2014-01-13

- Abgabetermine korrigiert auf 2014-01-16
- Aufgabe 2: Korrektur der Spezifikation von \mathcal{C} -Pfeilen
- Aufgabe 3: Korrektur der Aufgabenstellung.
- Aufgabe 7: Hinweis zur Definition von $\langle f, g \rangle$.
- Aufgabe 9: Definition von Koprodukt hinzugefügt

Abgabe: Do, 2014-01-16

Sie können die Aufgaben wahlweise in ihr Repository committen (auch eingescannt oder fotografiert) oder am Donnerstag den 16.1. in der Übungsstunde abgeben.

1. Vervollständigen Sie die folgende Spezifikation der Kategorie \mathbf{M} und zeigen Sie, dass \mathbf{M} die Kategoriengesetze erfüllt.
 - Die Objekte von \mathbf{M} sind die natürlichen Zahlen.
 - Ein \mathbf{M} -Pfeil $f : m \rightarrow n$ ist eine $m \times n$ Matrix reeller Zahlen.
 - Eine Komposition $g \circ f$ zweier Pfeile $f : m \rightarrow n$ und $g : n \rightarrow p$ ist ...
 - ...
2. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und A ein Objekt aus \mathcal{C} . Die Kategorie $(\mathcal{C} \downarrow A)$ ist folgendermaßen definiert:
 - Die Objekte sind Paare (B, π_B) von \mathcal{C} -Objekten B und \mathcal{C} -Pfeilen $\pi_B : B \rightarrow A$.
 - Die Pfeile $g \downarrow_A : (B, \pi_B) \rightarrow (B', \pi_{B'})$ sind genau die \mathcal{C} -Pfeile $g : B \rightarrow B'$ für die das folgende Diagramm kommutiert:

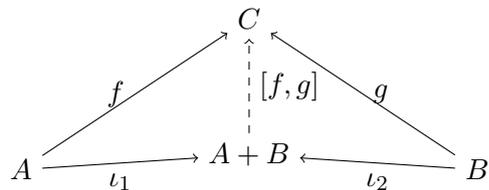
$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{g} & B' \\
 \pi_B \searrow & & \swarrow \pi_{B'} \\
 & A &
 \end{array}$$

Verifizieren Sie, dass $(\mathcal{C} \downarrow A)$ eine Kategorie ist. Wie würden Sie die Pfeile und Objekte der Kategorie $(\mathbf{Set} \downarrow \{0, 1\})$ interpretieren?

3. Zeigen Sie: Wenn zwei komponierbare Pfeile f, g monisch sind, dann ist auch $f \circ g$ monisch. Darüber hinaus, wenn $f \circ g$ monisch ist, dann ist auch g monisch.

4. Geben Sie eine Kategorie mit einem Pfeil an, der episch und monisch, aber kein Isomorphismus ist.
5. Was sind die initialen und terminalen Objekte der folgenden Kategorien?
 - $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ (die Produktkategorie von \mathbf{Set} und \mathbf{Set})
 - $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$
6. Geben Sie eine Kategorie ohne initiale Objekte an. Geben Sie außerdem eine Kategorie ohne terminale Objekte an.
7. Zeigen Sie, dass $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$. Zeichnen Sie erst ein entsprechendes Diagramm. (Für die Definition von $\langle f, g \rangle$, siehe Definition von Produkt)
8. Betrachten Sie zwei Objekte A und B der Kategorie einer partiellen Ordnung (P, \leq) . Geben Sie das Produkt $A \times B$, die Projektionen π_1 und π_2 sowie den Pfeil $\langle f, g \rangle$ für zwei Pfeile f und g an.
9. Geben Sie das Koprodukt zweier Objekte der Kategorie \mathbf{Poset} , sowie die Injektionen und den Pfeil $[f, g]$ für zwei Pfeile f und g an.

Das folgende Diagramm definiert das Koprodukt $A + B$ zweier Objekte A und B , die Injektionen ι_1 und ι_2 , und den Pfeil $[f, g]$ (dual zur Definition von Produkten):



10. Geben Sie ein Beispiel eines Koequalizers in der Kategorie \mathbf{Set} für zwei beliebige Funktionen f und g .
11. Zeigen Sie, dass jeder epische Equalizer auch ein Isomorphismus ist.