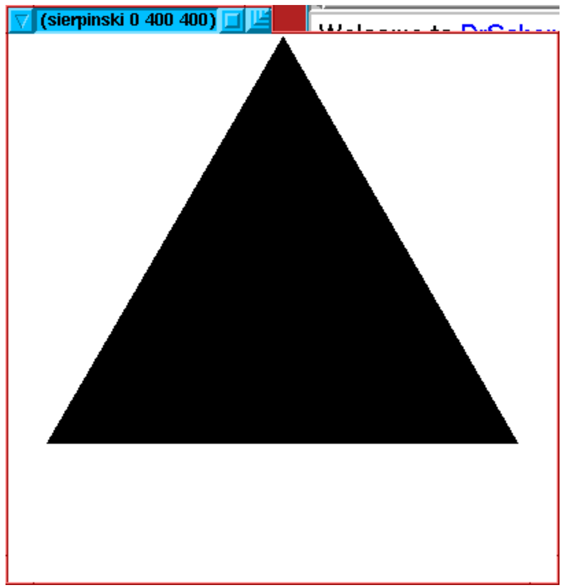
Fraktale Bilder

Konstruktion eines Bildes aus

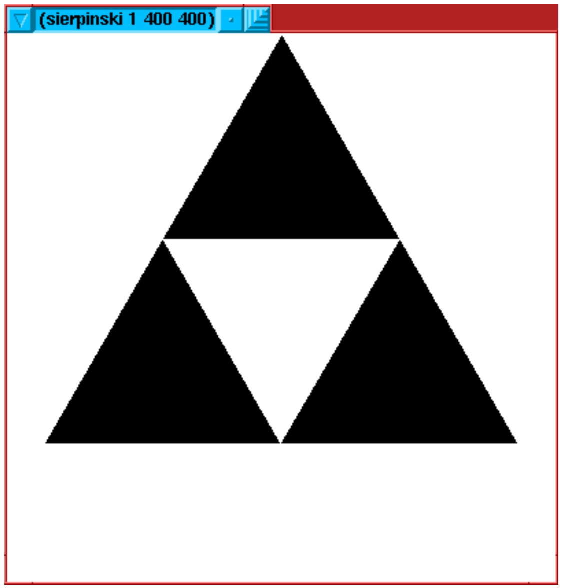
- wenigen Grundbausteinen
- einem Kombinationsverfahren, das
  - Grundbausteine transformiert (dreht, spiegelt, verkleinert, projiziert) und
  - Teile der Grundbausteine durch Grundbausteine ersetzt
  - Grundbausteine zusammenfügt

Beispiel: Sierpinski-Dreieck



- Sierpinski-Dreieck 0-ter Ordnung: ein gleichseitiges Dreieck

Sierpinski-Dreieck 1-ter Ordnung

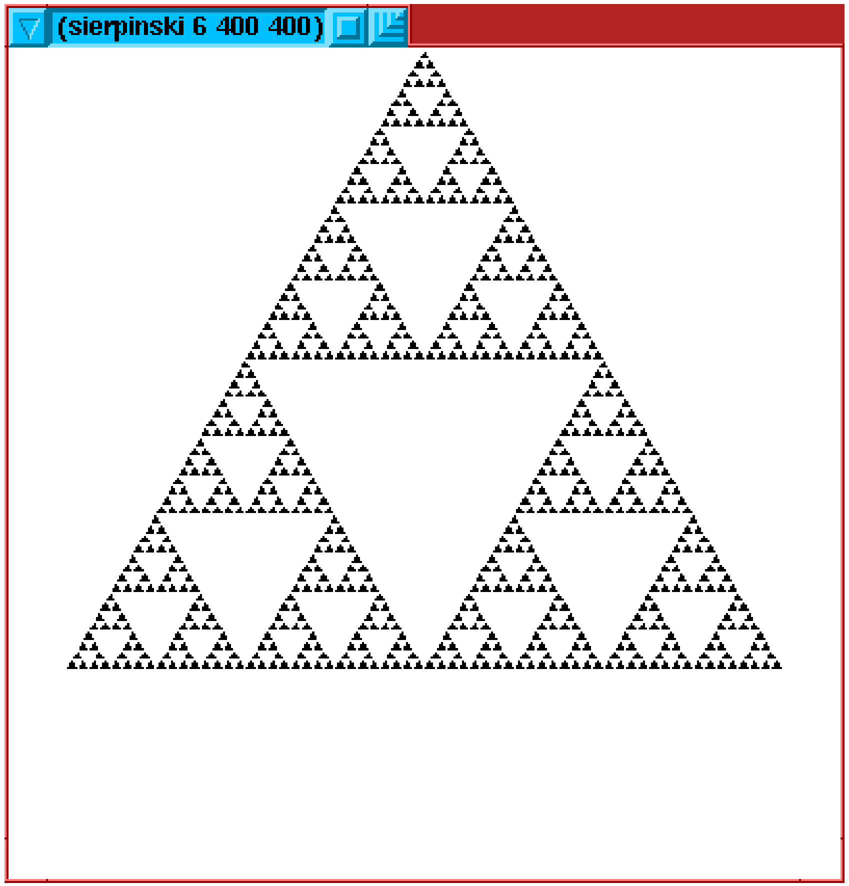


- Drei Kopien des Sierpinski-Dreiecks 0-ter Ordnung
- mit halber Höhe
  - die unteren beiden zentriert nebeneinander
  - das obere zentriert darüber

Sierpinski-Dreieck $(n+1)$-ter Ordnung

- Drei Kopien des Sierpinski-Dreiecks n-ter Ordnung
- mit halber Höhe
  - die unteren beiden zentriert nebeneinander
  - das obere zentriert darüber

Sierpinski-Dreieck 6-ter Ordnung



Programmierung des Sierpinski-Dreiecks n-ter Ordnung

```
; erzeuge Sierpinski-Dreieck der Ordnung n mit gegebener Höhe
(: sierpinski (natural natural -> image))
(define sierpinski
  (lambda (n h)
    (if (= n 0)
        (triangle h "solid" sp-color)
        (let ((sn-1 (sierpinski (- n 1) (/ h 2))))
          (above
           sn-1
           (beside sn-1 sn-1 "center")
           "center")))))
```

Eigenschaften des Sierpinski-Dreiecks

- Das Sierpinski-Dreieck ist der Grenzwert $n \to \infty$ der Dreiecke der Ordnung n
- Es ist nicht leer, aber seine Fläche ist 0.
- Seine Dimension ist $\log 3/\log 2 \approx 1.584962501$
- Beispiel für ein *Fraktal*.

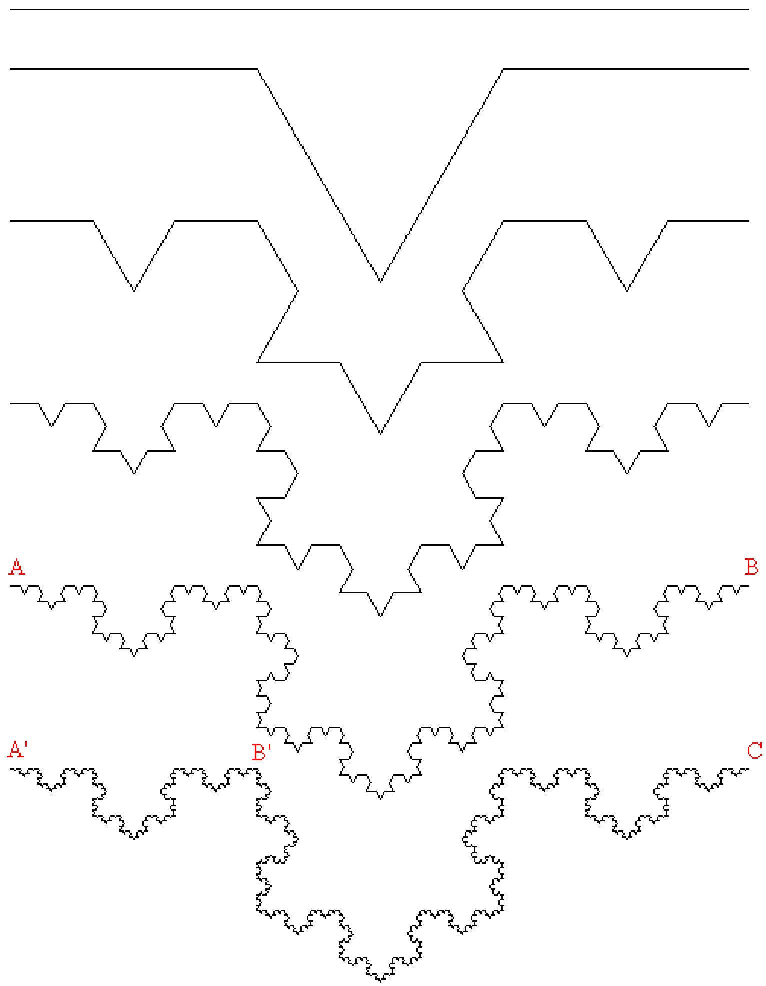
Das Kastenfraktal

- Der Kasten der Ordnung 0 ist ein Quadrat.
- Der Kasten der Ordnung $n + 1$ besteht aus fünf Kopien des Kastens der Ordnung n mit jeweils $1/3$ der Höhe angeordnet in Form eines Kreuzes.

Die Kochkurve

- Die Kochkurve der Ordnung 0 ist eine Strecke der Länge r in Richtung ϑ.
- Die Kochkurve der Ordnung $n+1$ mit Länge r und Richtung ϑ besteht aus vier Kochkurven der Ordnung n und der Länge $r/3$ aneinandergesetzt in Richtung
  1. ϑ
  2. $\vartheta + 60^\circ$
  3. $\vartheta - 60^\circ$
  4. ϑ

$\Rightarrow$ Die Länge der Kochkurve der Ordnung $n+1$ ist $\frac{4}{3}$ der Länge der Kochkurve der Ordnung n, d.h. $r(\frac{4}{3})^n$.



Quelle: Wikimedia Commons

Die Hilbertkurve