

Informatik I: Einführung in die Programmierung

9. Bäume

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



UNI
FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann

08. Dezember 2020



Der Baum

Der Baum

Definition
Terminologie
Beispiele

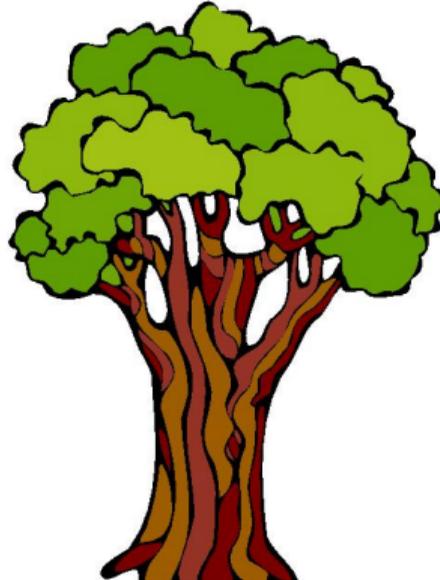
Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Bäume sind in der Informatik allgegenwärtig.



Der Baum

Definition
Terminologie
Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Bäume sind in der Informatik allgegenwärtig.
- Gezeichnet werden sie meistens mit der Wurzel nach oben!



Der Baum

Definition
Terminologie
Beispiele

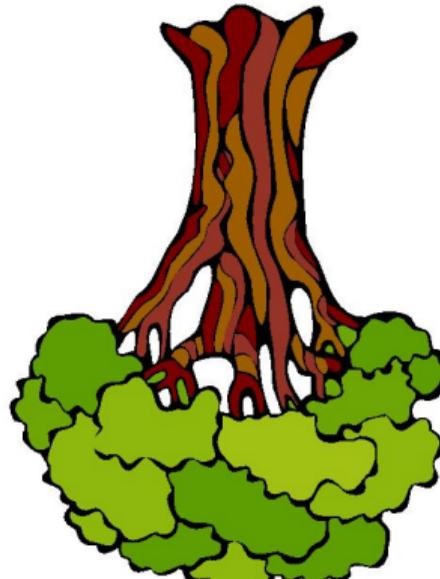
Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Bäume sind in der Informatik allgegenwärtig.
- Gezeichnet werden sie meistens mit der Wurzel nach oben!



Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



■ Induktive Definition:

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Induktive Definition:
 - Der **leere Baum** ist ein Baum.

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



■ Induktive Definition:

- Der **leere Baum** ist ein Baum.
- Wenn t_1, \dots, t_n , $n \geq 0$ disjunkte Bäume sind und k ein **Knoten**, der nicht in t_1, \dots, t_n vorkommt, dann ist auch die Struktur bestehend aus der **Wurzel** k mit **zugeordneten Teilbäumen** t_1, \dots, t_n ein **Baum**.

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



■ Induktive Definition:

- Der **leere Baum** ist ein Baum.
- Wenn t_1, \dots, t_n , $n \geq 0$ disjunkte Bäume sind und k ein **Knoten**, der nicht in t_1, \dots, t_n vorkommt, dann ist auch die Struktur bestehend aus der **Wurzel** k mit **zugeordneten Teilbäumen** t_1, \dots, t_n ein **Baum**.
- Nichts sonst ist ein Baum.

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



■ Induktive Definition:

- Der **leere Baum** ist ein Baum.
- Wenn t_1, \dots, t_n , $n \geq 0$ disjunkte Bäume sind und k ein **Knoten**, der nicht in t_1, \dots, t_n vorkommt, dann ist auch die Struktur bestehend aus der **Wurzel** k mit **zugeordneten Teilbäumen** t_1, \dots, t_n ein **Baum**.
- Nichts sonst ist ein Baum.
- Beispiel:

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



■ Induktive Definition:

- Der **leere Baum** ist ein Baum.
- Wenn t_1, \dots, t_n , $n \geq 0$ disjunkte Bäume sind und k ein **Knoten**, der nicht in t_1, \dots, t_n vorkommt, dann ist auch die Struktur bestehend aus der **Wurzel** k mit **zugeordneten Teilbäumen** t_1, \dots, t_n ein **Baum**.
- Nichts sonst ist ein Baum.
- Beispiel:

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



■ Induktive Definition:

- Der **leere Baum** ist ein Baum.
- Wenn t_1, \dots, t_n , $n \geq 0$ disjunkte Bäume sind und k ein **Knoten**, der nicht in t_1, \dots, t_n vorkommt, dann ist auch die Struktur bestehend aus der **Wurzel** k mit **zugeordneten Teilbäumen** t_1, \dots, t_n ein **Baum**.
- Nichts sonst ist ein Baum.
- Beispiel:



Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

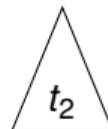
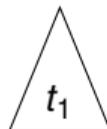
Suchbäume

Zusammenfassung



■ Induktive Definition:

- Der **leere Baum** ist ein Baum.
- Wenn t_1, \dots, t_n , $n \geq 0$ disjunkte Bäume sind und k ein **Knoten**, der nicht in t_1, \dots, t_n vorkommt, dann ist auch die Struktur bestehend aus der **Wurzel** k mit **zugeordneten Teilbäumen** t_1, \dots, t_n ein **Baum**.
- Nichts sonst ist ein Baum.
- Beispiel:



Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

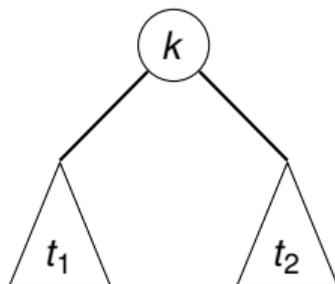
Suchbäume

Zusammenfassung



■ Induktive Definition:

- Der **leere Baum** ist ein Baum.
- Wenn t_1, \dots, t_n , $n \geq 0$ disjunkte Bäume sind und k ein **Knoten**, der nicht in t_1, \dots, t_n vorkommt, dann ist auch die Struktur bestehend aus der **Wurzel** k mit **zugeordneten Teilbäumen** t_1, \dots, t_n ein **Baum**.
- Nichts sonst ist ein Baum.
- Beispiel:



Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

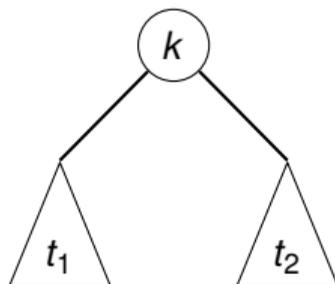
Suchbäume

Zusammenfassung



■ Induktive Definition:

- Der **leere Baum** ist ein Baum.
- Wenn t_1, \dots, t_n , $n \geq 0$ disjunkte Bäume sind und k ein **Knoten**, der nicht in t_1, \dots, t_n vorkommt, dann ist auch die Struktur bestehend aus der **Wurzel** k mit **zugeordneten Teilbäumen** t_1, \dots, t_n ein **Baum**.
- Nichts sonst ist ein Baum.
- Beispiel:



□

- **Beachte:** Bäume können auch anders definiert werden und können auch eine andere Gestalt haben (z.B. ungewurzelt).

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Alle Knoten, denen keine Teilbäume zugeordnet sind, heißen **Blätter**.

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

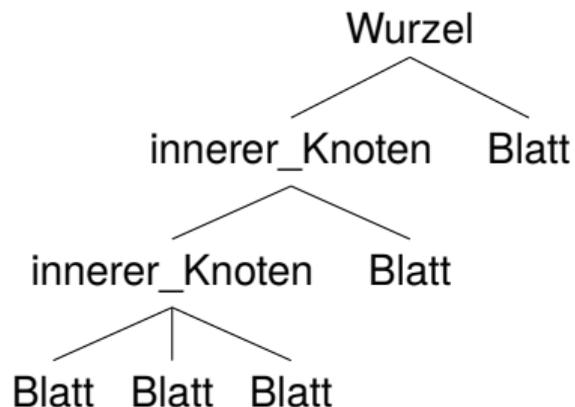
Binärbäume

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Alle Knoten, denen keine Teilbäume zugeordnet sind, heißen **Blätter**.
- Knoten, die keine Blätter sind, heißen **innere Knoten**.



Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

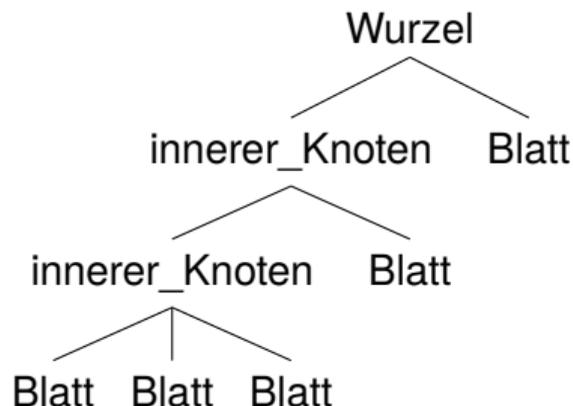
Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Alle Knoten, denen keine Teilbäume zugeordnet sind, heißen **Blätter**.
- Knoten, die keine Blätter sind, heißen **innere Knoten**.



- Die Wurzel kann also ein Blatt sein (keine weiteren Teilbäume) oder ein innerer Knoten.

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Wenn k_1 ein Knoten und k_2 die Wurzel eines zugeordneten Teilbaums ist, dann gilt:

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Wenn k_1 ein Knoten und k_2 die Wurzel eines zugeordneten Teilbaums ist, dann gilt:
 - k_1 ist **Elternknoten** von k_2 ,

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Wenn k_1 ein Knoten und k_2 die Wurzel eines zugeordneten Teilbaums ist, dann gilt:
 - k_1 ist **Elternknoten** von k_2 ,
 - k_1 sowie der Elternknoten von k_1 sowie dessen Elternknoten usw. sind **Vorgänger** von k_2 .

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Wenn k_1 ein Knoten und k_2 die Wurzel eines zugeordneten Teilbaums ist, dann gilt:
 - k_1 ist **Elternknoten** von k_2 ,
 - k_1 sowie der Elternknoten von k_1 sowie dessen Elternknoten usw. sind **Vorgänger** von k_2 .
 - k_2 ist **Kind** von k_1 .

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Wenn k_1 ein Knoten und k_2 die Wurzel eines zugeordneten Teilbaums ist, dann gilt:
 - k_1 ist **Elternknoten** von k_2 ,
 - k_1 sowie der Elternknoten von k_1 sowie dessen Elternknoten usw. sind **Vorgänger** von k_2 .
 - k_2 ist **Kind** von k_1 .
 - Alle Kinder von k_1 , deren Kinder, usw. sind **Nachfolger** von k_1 .

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Wenn k_1 ein Knoten und k_2 die Wurzel eines zugeordneten Teilbaums ist, dann gilt:
 - k_1 ist **Elternknoten** von k_2 ,
 - k_1 sowie der Elternknoten von k_1 sowie dessen Elternknoten usw. sind **Vorgänger** von k_2 .
 - k_2 ist **Kind** von k_1 .
 - Alle Kinder von k_1 , deren Kinder, usw. sind **Nachfolger** von k_1 .
- Bäume sind oft **markiert**. Die Markierung weist jedem Knoten eine **Marke** zu.

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Wenn k_1 ein Knoten und k_2 die Wurzel eines zugeordneten Teilbaums ist, dann gilt:
 - k_1 ist **Elternknoten** von k_2 ,
 - k_1 sowie der Elternknoten von k_1 sowie dessen Elternknoten usw. sind **Vorgänger** von k_2 .
 - k_2 ist **Kind** von k_1 .
 - Alle Kinder von k_1 , deren Kinder, usw. sind **Nachfolger** von k_1 .
- Bäume sind oft **markiert**. Die Markierung weist jedem Knoten eine **Marke** zu.
- Formal: Wenn K die Knotenmenge eines Baums ist und M eine Menge von Marken, dann ist die **Markierung eine Abbildung $\mu : K \rightarrow M$** .

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung

Beispiel: Verzeichnisbaum



In Linux (und anderen Betriebssystemen) ist die Verzeichnisstruktur im Wesentlichen baumartig.

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

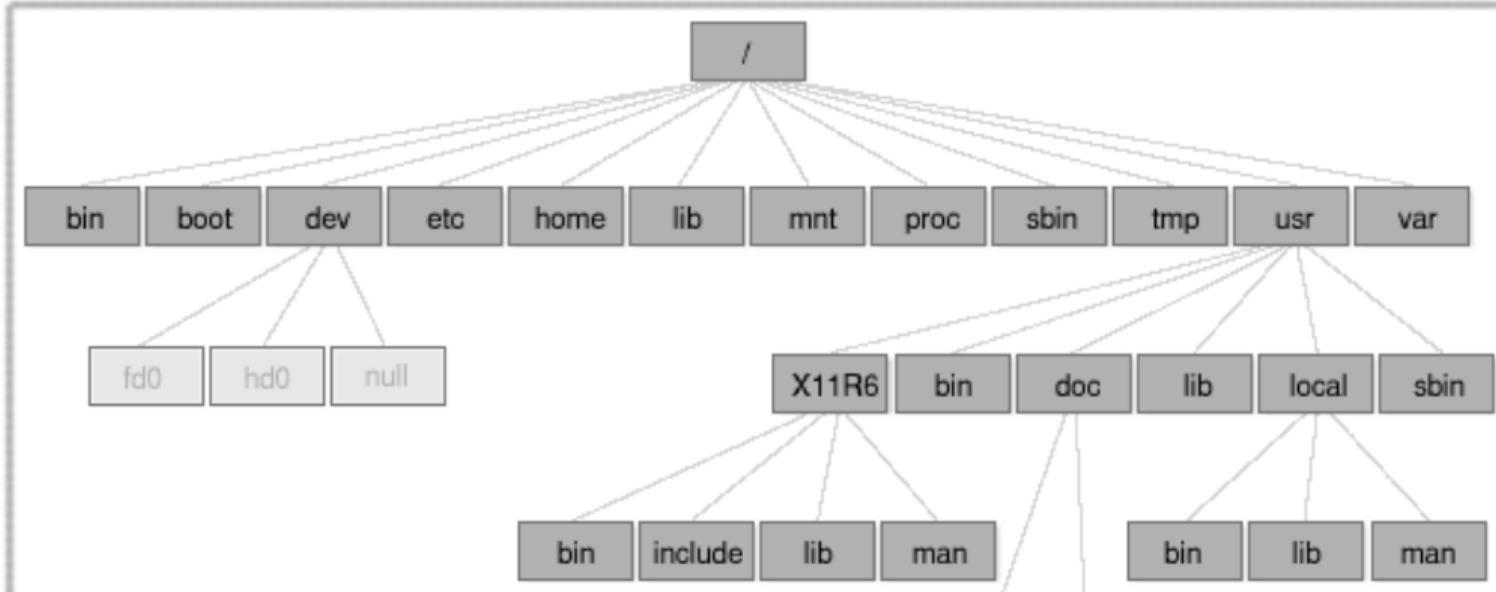
Suchbäume

Zusammenfassung

Beispiel: Verzeichnisbaum



In Linux (und anderen Betriebssystemen) ist die Verzeichnisstruktur im Wesentlichen baumartig.



Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



Wenn die Struktur einer Sprache mit Hilfe einer formalen Grammatiken spezifiziert ist, dann kann der Satzaufbau durch sogenannte Syntaxbäume beschrieben werden.

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

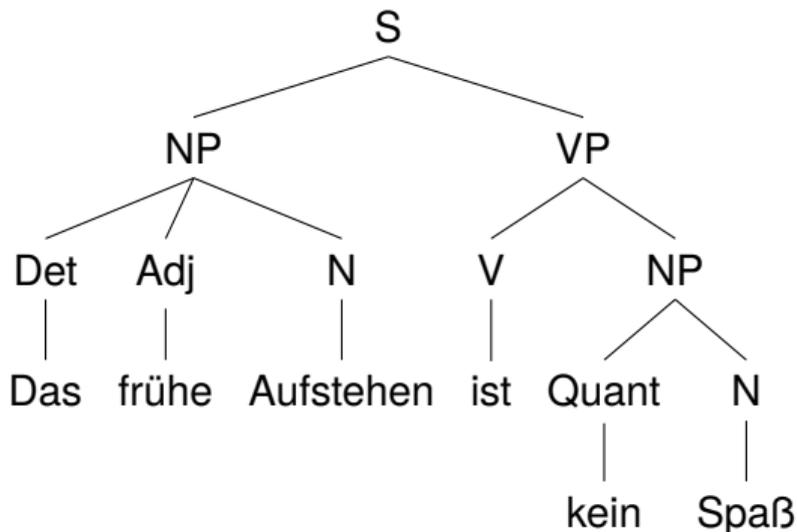
Suchbäume

Zusammen-
fassung

Beispiel: Syntaxbaum



Wenn die Struktur einer Sprache mit Hilfe einer formalen Grammatiken spezifiziert ist, dann kann der Satzaufbau durch sogenannte Syntaxbäume beschrieben werden.



Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Bäume können arithmetische (und andere) Ausdrücke so darstellen, dass ihre Auswertung eindeutig (und einfach durchführbar) ist, ohne dass Klammern notwendig sind.

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Bäume können arithmetische (und andere) Ausdrücke so darstellen, dass ihre Auswertung eindeutig (und einfach durchführbar) ist, ohne dass Klammern notwendig sind.
- Beispiel: $(5 + 6) * 3 * 2$

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Bäume können arithmetische (und andere) Ausdrücke so darstellen, dass ihre Auswertung eindeutig (und einfach durchführbar) ist, ohne dass Klammern notwendig sind.
- Beispiel: $(5 + 6) * 3 * 2$
- Entspricht: $((5 + 6) * 3) * 2$

Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

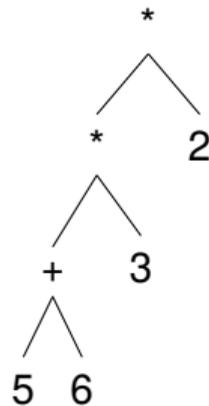
Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Bäume können arithmetische (und andere) Ausdrücke so darstellen, dass ihre Auswertung eindeutig (und einfach durchführbar) ist, ohne dass Klammern notwendig sind.
- Beispiel: $(5 + 6) * 3 * 2$
- Entspricht: $((5 + 6) * 3) * 2$
- Operatoren als Markierung innerer Knoten, Zahlen als Markierung der Blätter:



Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

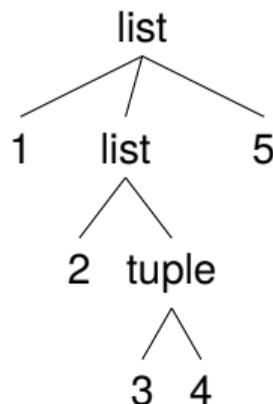
Suchbäume

Zusammenfassung

Beispiel: Listen und Tupel als Bäume



- Jede Liste und jedes Tupel kann als Baum angesehen werden, bei dem der Typ die Knotenmarkierung ist und die Elemente die Teilbäume sind.
- Beispiel: $[1, [2, (3, 4)], 5]$



Der Baum

Definition

Terminologie

Beispiele

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



Binärbäume

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der Binärbaum ist ein **Spezialfall eines Baumes**.
- Ein Binärbaum ist entweder **leer** oder besteht aus einem (Wurzel-) Knoten und zwei Teilbäumen.
- Für viele Anwendungsfälle angemessen.
- Funktionen über solchen Bäumen sind einfach definierbar.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Der **leere Baum** wird durch `None` repräsentiert.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der **leere Baum** wird durch `None` repräsentiert.
- Jeder andere **Knoten** wird durch ein `Node`-Objekt repräsentiert.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der **leere Baum** wird durch `None` repräsentiert.
- Jeder andere **Knoten** wird durch ein `Node`-Objekt repräsentiert.
- Das Attribut `mark` enthält die **Markierung**.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der **leere Baum** wird durch `None` repräsentiert.
- Jeder andere **Knoten** wird durch ein `Node`-Objekt repräsentiert.
- Das Attribut `mark` enthält die **Markierung**.
- Das Attribut `left` enthält den **linken Teilbaum**.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der **leere Baum** wird durch `None` repräsentiert.
- Jeder andere **Knoten** wird durch ein `Node`-Objekt repräsentiert.
- Das Attribut `mark` enthält die **Markierung**.
- Das Attribut `left` enthält den **linken Teilbaum**.
- Das Attribut `right` enthält den **rechten Teilbaum**.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der **leere Baum** wird durch `None` repräsentiert.
- Jeder andere **Knoten** wird durch ein `Node`-Objekt repräsentiert.
- Das Attribut `mark` enthält die **Markierung**.
- Das Attribut `left` enthält den **linken Teilbaum**.
- Das Attribut `right` enthält den **rechten Teilbaum**.
- Beispiele:

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der **leere Baum** wird durch `None` repräsentiert.
- Jeder andere **Knoten** wird durch ein `Node`-Objekt repräsentiert.
- Das Attribut `mark` enthält die **Markierung**.
- Das Attribut `left` enthält den **linken Teilbaum**.
- Das Attribut `right` enthält den **rechten Teilbaum**.
- Beispiele:
 - Der Baum bestehend aus dem einzigen Knoten mit der Markierung 8: `Node (8, None, None)`

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Der **leere Baum** wird durch `None` repräsentiert.
- Jeder andere **Knoten** wird durch ein `Node`-Objekt repräsentiert.
- Das Attribut `mark` enthält die **Markierung**.
- Das Attribut `left` enthält den **linken Teilbaum**.
- Das Attribut `right` enthält den **rechten Teilbaum**.
- Beispiele:
 - Der Baum bestehend aus dem einzigen Knoten mit der Markierung 8: `Node (8, None, None)`
 - Der Baum mit Wurzel '+', linkem Teilbaum mit Blatt 5, rechtem Teilbaum mit Blatt 6:
`Node('+', Node(5, None, None), Node(6, None, None))`

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



```
from typing import Any, Optional
@dataclass
class Node:
    mark : Any
    left : Optional['Node']
    right : Optional['Node']
```

Bemerkung zu den Typannotationen

- Any: ein Objekt von beliebigem Typ
- Optional[t]: entweder t oder None (aber nichts anderes)
- Der Type Node existiert erst **nach** Ausführung der class-Anweisung. Der String 'Node' wird dann durch den Typ Node ersetzt.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

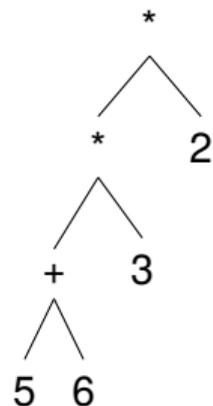
Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



wird folgendermaßen mit Node Objekten dargestellt:

```
Node ('*', Node ('*', Node ('+', Node (5, None, None),  
Node (6, None, None)),  
Node (3, None, None)),  
Node (2, None, None))
```

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



Funktionsgerüst

```
def tree_str (tree : Optional[Node]) -> string:  
    if tree is None:  
        return "fill_in"  
    else:  
        l_str = tree_str (tree.left)  
        r_str = tree_str (tree.right)  
        return "fill_in"
```

- Node Objekte enthalten selbst wieder Node Objekte (oder None) in den Attributen left und right.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



Funktionsgerüst

```
def tree_str (tree : Optional[Node]) -> string:  
    if tree is None:  
        return "fill_in"  
    else:  
        l_str = tree_str (tree.left)  
        r_str = tree_str (tree.right)  
        return "fill_in"
```

- Node Objekte enthalten selbst wieder Node Objekte (oder None) in den Attributen `left` und `right`.
- Zum Ausdrucken eines Node Objekts müssen auch die enthaltenen Node Objekte ausgedruckt werden.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



Funktionsgerüst

```
def tree_str (tree : Optional[Node]) -> string:
    if tree is None:
        return "fill_□in"
    else:
        l_str = tree_str (tree.left)
        r_str = tree_str (tree.right)
        return "fill_□in"
```

- Node Objekte enthalten selbst wieder Node Objekte (oder None) in den Attributen `left` und `right`.
- Zum Ausdrucken eines Node Objekts müssen auch die enthaltenen Node Objekte ausgedruckt werden.
- `tree_str` ist **rekursiv**, es wird in seiner eigenen Definition aufgerufen!

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Die **rekursiven Aufrufe** `tree_str (tree.left)` und `tree_str (tree.right)` erfolgen **auf den Kindern des Knotens**.
- Ergibt sich zwangsläufig aus der induktiven Definition!
- **Rekursive Aufrufe auf den Teilbäumen** sind Teil des Funktionsgerüsts, sobald eine baumartige Struktur bearbeitet werden soll.

- Die **Alternative** “`tree is None`” ergibt sich zwangsläufig aus dem Typ `tree:Optional[Node]`: `tree` ist **entweder None oder eine Node-Instanz**.

- Alle Funktionen auf Binärbäumen verwenden dieses Gerüst.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



```
def tree_str (tree : Optional[Node]) -> string:  
    if tree is None:  
        return "None"  
    else:  
        return ("Node("  
            + repr(tree.mark) + ",␣"  
            + tree_str (tree.left) + ",␣"  
            + tree_str (tree.right) + ")")
```

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

**Funktionen auf
Bäumen**

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Die **Tiefe eines Knotens** k (Abstand zur Wurzel) ist

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

**Baumeigen-
schaften**

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Die **Tiefe eines Knotens** k (Abstand zur Wurzel) ist
 - 0, falls k die Wurzel ist,

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

**Baumeigen-
schaften**

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Die **Tiefe eines Knotens** k (Abstand zur Wurzel) ist
 - 0, falls k die Wurzel ist,
 - $i + 1$, wenn i die Tiefe des Elternknotens ist.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Die **Tiefe eines Knotens** k (Abstand zur Wurzel) ist
 - 0, falls k die Wurzel ist,
 - $i + 1$, wenn i die Tiefe des Elternknotens ist.
- Die **Höhe eines Baumes** ist die maximale Tiefe über alle Blätter:

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Die **Tiefe eines Knotens** k (Abstand zur Wurzel) ist
 - 0, falls k die Wurzel ist,
 - $i + 1$, wenn i die Tiefe des Elternknotens ist.
- Die **Höhe eines Baumes** ist die maximale Tiefe über alle Blätter:
 - -1 für den leeren Baum,

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Die **Tiefe eines Knotens** k (Abstand zur Wurzel) ist
 - 0, falls k die Wurzel ist,
 - $i + 1$, wenn i die Tiefe des Elternknotens ist.
- Die **Höhe eines Baumes** ist die maximale Tiefe über alle Blätter:
 - -1 für den leeren Baum,
 - $m + 1$, wenn m die maximale Höhe aller der Wurzel zugeordneten Teilbäume ist.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Die **Tiefe eines Knotens** k (Abstand zur Wurzel) ist
 - 0, falls k die Wurzel ist,
 - $i + 1$, wenn i die Tiefe des Elternknotens ist.
- Die **Höhe eines Baumes** ist die maximale Tiefe über alle Blätter:
 - -1 für den leeren Baum,
 - $m + 1$, wenn m die maximale Höhe aller der Wurzel zugeordneten Teilbäume ist.
- Die **Größe eines Baumes** ist die Anzahl seiner Knoten.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Die **Tiefe eines Knotens** k (Abstand zur Wurzel) ist
 - 0, falls k die Wurzel ist,
 - $i + 1$, wenn i die Tiefe des Elternknotens ist.
- Die **Höhe eines Baumes** ist die maximale Tiefe über alle Blätter:
 - -1 für den leeren Baum,
 - $m + 1$, wenn m die maximale Höhe aller der Wurzel zugeordneten Teilbäume ist.
- Die **Größe eines Baumes** ist die Anzahl seiner Knoten.
 - 0 für den leeren Baum,

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Die **Tiefe eines Knotens** k (Abstand zur Wurzel) ist
 - 0, falls k die Wurzel ist,
 - $i + 1$, wenn i die Tiefe des Elternknotens ist.
- Die **Höhe eines Baumes** ist die maximale Tiefe über alle Blätter:
 - -1 für den leeren Baum,
 - $m + 1$, wenn m die maximale Höhe aller der Wurzel zugeordneten Teilbäume ist.
- Die **Größe eines Baumes** ist die Anzahl seiner Knoten.
 - 0 für den leeren Baum,
 - $s + 1$, wenn s die Summe der Größen der Teilbäume ist.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



$$\text{height}(tree) = \begin{cases} -1, & \text{if } tree \text{ is empty} \\ 1 + \max(\text{height}(tree.left), \text{height}(tree.right)), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



$$\text{height}(tree) = \begin{cases} -1, & \text{if } tree \text{ is empty} \\ 1 + \max(\text{height}(tree.left), \text{height}(tree.right)), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\text{size}(tree) = \begin{cases} 0, & \text{if } tree \text{ is empty;} \\ 1 + \text{size}(tree.left) + \text{size}(tree.right), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



Höhe und Größe von Binärbäumen

```
def height(tree : Optional[Node]) -> int:
    if (tree is None):
        return -1
    else:
        return(max(height(tree.left),
                    height(tree.right)) + 1)

def size(tree : Optional[Node]) -> int:
    if (tree is None):
        return 0
    else:
        return(size(tree.left)
               + size(tree.right) + 1)
```

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Oft sollen alle Knoten eines Baumes besucht und bearbeitet werden.

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Oft sollen alle Knoten eines Baumes besucht und bearbeitet werden.
- 3 Vorgehensweisen (**Traversierungen**) sind üblich:

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Oft sollen alle Knoten eines Baumes besucht und bearbeitet werden.
- 3 Vorgehensweisen (**Traversierungen**) sind üblich:
 - **Pre-Order** (Hauptreihenfolge): Zuerst der Knoten selbst, dann der linke, danach der rechte Teilbaum

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Oft sollen alle Knoten eines Baumes besucht und bearbeitet werden.
- 3 Vorgehensweisen (**Traversierungen**) sind üblich:
 - **Pre-Order** (Hauptreihenfolge): Zuerst der Knoten selbst, dann der linke, danach der rechte Teilbaum
 - **Post-Order** (Nebenreihenfolge): Zuerst der linke, danach der rechte Teilbaum, zum Schluss der Knoten selbst

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Oft sollen alle Knoten eines Baumes besucht und bearbeitet werden.
- 3 Vorgehensweisen (**Traversierungen**) sind üblich:
 - **Pre-Order** (Hauptreihenfolge): Zuerst der Knoten selbst, dann der linke, danach der rechte Teilbaum
 - **Post-Order** (Nebenreihenfolge): Zuerst der linke, danach der rechte Teilbaum, zum Schluss der Knoten selbst
 - **In-Order** (symmetrische Reihenfolge): Zuerst der linke Teilbaum, dann der Knoten selbst, danach der rechte Teilbaum

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Oft sollen alle Knoten eines Baumes besucht und bearbeitet werden.
- 3 Vorgehensweisen (**Traversierungen**) sind üblich:
 - **Pre-Order** (Hauptreihenfolge): Zuerst der Knoten selbst, dann der linke, danach der rechte Teilbaum
 - **Post-Order** (Nebenreihenfolge): Zuerst der linke, danach der rechte Teilbaum, zum Schluss der Knoten selbst
 - **In-Order** (symmetrische Reihenfolge): Zuerst der linke Teilbaum, dann der Knoten selbst, danach der rechte Teilbaum
- Manchmal auch **Reverse In-Order** (anti-symmetrische Reihenfolge): Rechter Teilbaum, Knoten, dann linker Teilbaum

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Oft sollen alle Knoten eines Baumes besucht und bearbeitet werden.
- 3 Vorgehensweisen (**Traversierungen**) sind üblich:
 - **Pre-Order** (Hauptreihenfolge): Zuerst der Knoten selbst, dann der linke, danach der rechte Teilbaum
 - **Post-Order** (Nebenreihenfolge): Zuerst der linke, danach der rechte Teilbaum, zum Schluss der Knoten selbst
 - **In-Order** (symmetrische Reihenfolge): Zuerst der linke Teilbaum, dann der Knoten selbst, danach der rechte Teilbaum
- Manchmal auch **Reverse In-Order** (anti-symmetrische Reihenfolge): Rechter Teilbaum, Knoten, dann linker Teilbaum
- Auch das Besuchen nach Tiefenlevel von links nach rechts (**level-order**) ist denkbar

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

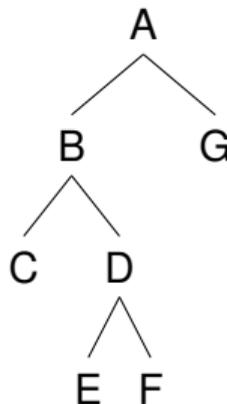
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *pre-order* aus



Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

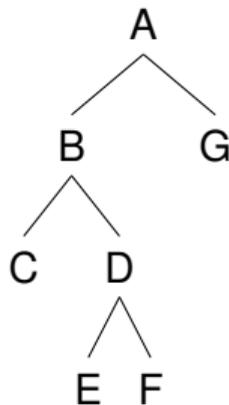
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *pre-order* aus



- Ausgabe: A

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

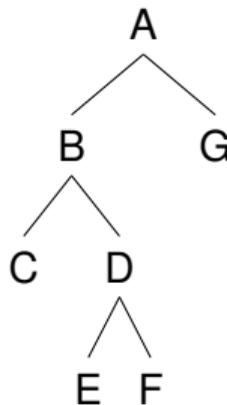
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *pre-order* aus



- Ausgabe: A

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

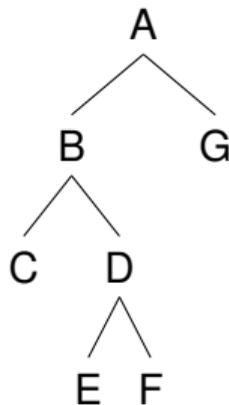
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *pre-order* aus



- Ausgabe: A B

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

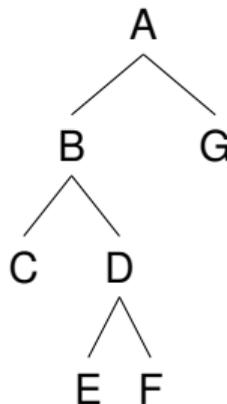
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *pre-order* aus



- Ausgabe: A B C

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

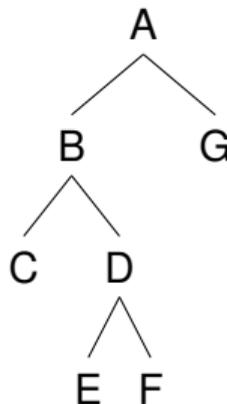
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *pre-order* aus



- Ausgabe: A B C D

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

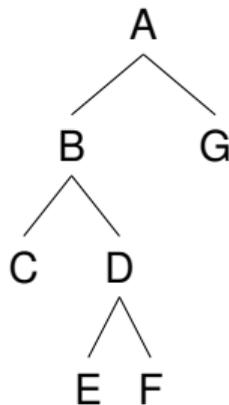
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *pre-order* aus



- Ausgabe: A B C D E

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

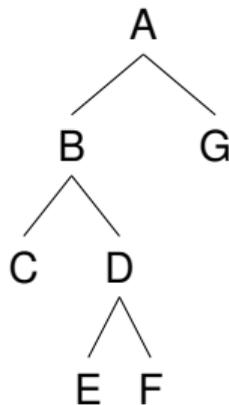
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *pre-order* aus



- Ausgabe: A B C D E F

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

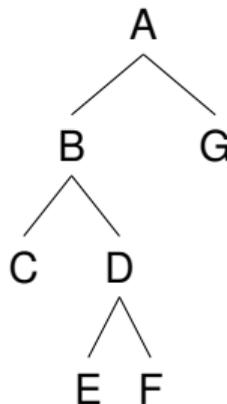
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *pre-order* aus



- Ausgabe: A B C D E F G

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

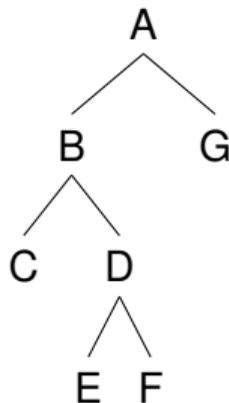
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *post-order* aus



Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

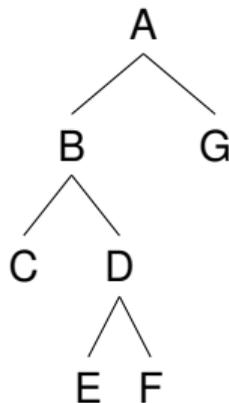
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *post-order* aus



- Ausgabe: C

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

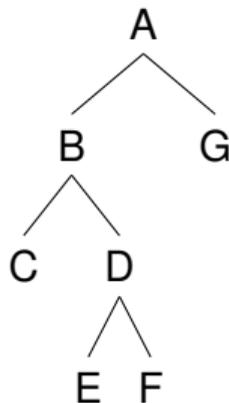
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *post-order* aus



- Ausgabe: C

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

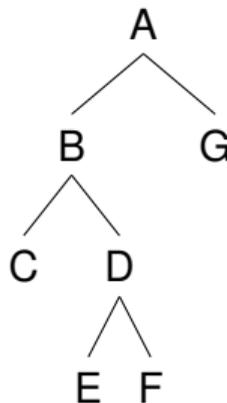
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *post-order* aus



- Ausgabe: C E

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

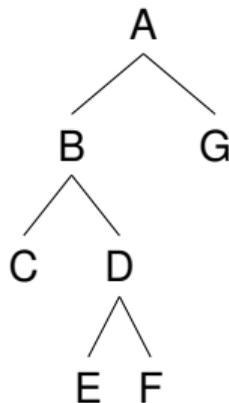
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *post-order* aus



- Ausgabe: C E F

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

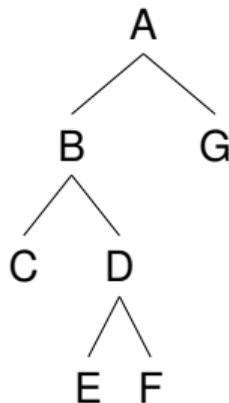
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *post-order* aus



- Ausgabe: C E F D

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

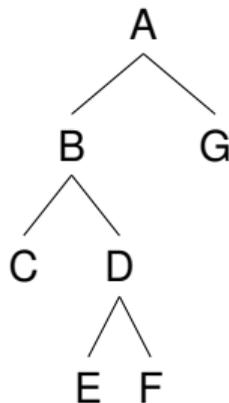
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *post-order* aus



- Ausgabe: C E F D B

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

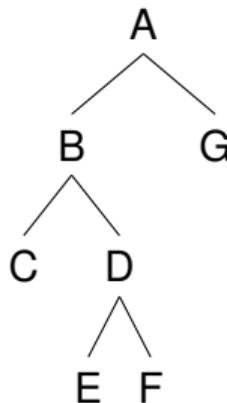
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *post-order* aus



- Ausgabe: C E F D B G

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

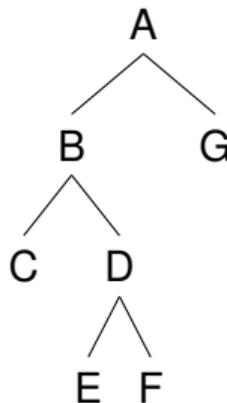
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *post-order* aus



- Ausgabe: C E F D B G A

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

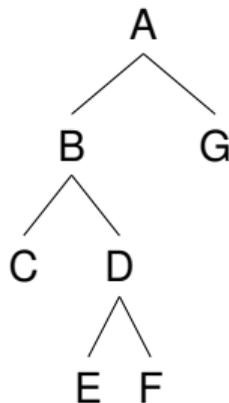
Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



- Gebe Baum *in-order* aus.



Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaf-
ten

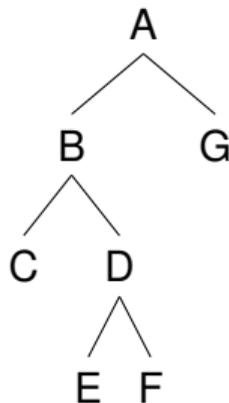
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *in-order* aus.



- Ausgabe: C

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

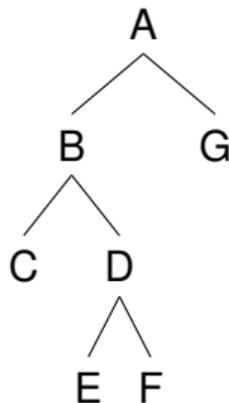
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *in-order* aus.



- Ausgabe: C

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

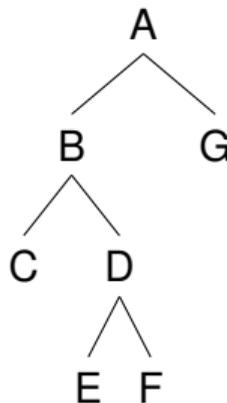
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *in-order* aus.



- Ausgabe: C B

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

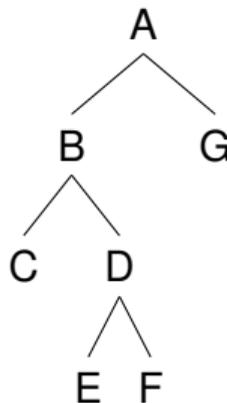
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *in-order* aus.



- Ausgabe: C B E

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

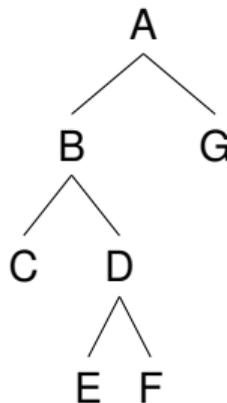
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *in-order* aus.



- Ausgabe: C B E D

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

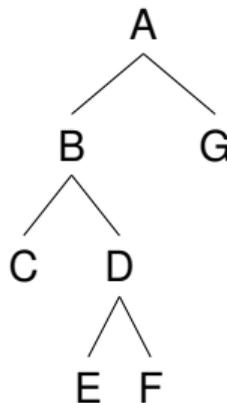
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *in-order* aus.



- Ausgabe: C B E D F

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

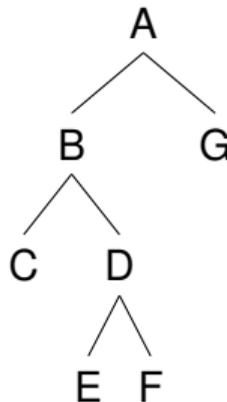
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *in-order* aus.



- Ausgabe: C B E D F A

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

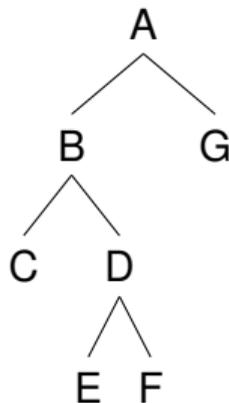
Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Gebe Baum *in-order* aus.



- Ausgabe: C B E D F A G

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



Post-Order Printing

```
def postorder(tree : Optional[Node]):  
    if tree is None:  
        pass  
    else:  
        postorder(tree.left)  
        postorder(tree.right)  
        print(tree.mark)  
def leaf (m : Any) -> Node:  
    return Node (m, None, None)  
tree = Node('*', Node('+', leaf(6), leaf(5)),  
             leaf(1))  
postorder(tree)
```

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammen-
fassung



Post-Order Printing

```
def postorder(tree : Optional[Node]):  
    if tree is None:  
        pass  
    else:  
        postorder(tree.left)  
        postorder(tree.right)  
        print(tree.mark)  
def leaf (m : Any) -> Node:  
    return Node (m, None, None)  
tree = Node('*', Node('+', leaf(6), leaf(5)),  
             leaf(1))  
postorder(tree)
```

Die *post-order* Ausgabe eines arithmetischen Ausdrucks heißt auch **umgekehrt polnische** oder **Postfix**-Notation (HP-Taschenrechner, Programmiersprachen *Forth* und *PostScript*)

Der Baum

Binärbäume

Repräsentation

Beispiel

Funktionen auf
Bäumen

Baumeigenschaften

Traversierung

Suchbäume

Zusammenfassung



Suchbäume

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammen-
fassung



- *Suchbäume* realisieren Wörterbücher und dienen dazu, Items schnell wieder zu finden.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammen-
fassung



- *Suchbäume* realisieren Wörterbücher und dienen dazu, Items schnell wieder zu finden.
- Ein **Suchbaum** ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaften** erfüllt:

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



- *Suchbäume* realisieren Wörterbücher und dienen dazu, Items schnell wieder zu finden.
- Ein **Suchbaum** ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaften** erfüllt:
 - Alle Markierungen im linken Teilbaum sind *kleiner* als die aktuelle Knotenmarkierung, alle Markierungen im rechten Teilbaum sind *größer*.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



- *Suchbäume* realisieren Wörterbücher und dienen dazu, Items schnell wieder zu finden.
- Ein **Suchbaum** ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaften** erfüllt:
 - Alle Markierungen im linken Teilbaum sind *kleiner* als die aktuelle Knotenmarkierung, alle Markierungen im rechten Teilbaum sind *größer*.
- **Suchen nach einem Item m** : Vergleiche mit Markierung im aktuellem Knoten,

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



- *Suchbäume* realisieren Wörterbücher und dienen dazu, Items schnell wieder zu finden.
- Ein **Suchbaum** ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaften** erfüllt:
 - Alle Markierungen im linken Teilbaum sind *kleiner* als die aktuelle Knotenmarkierung, alle Markierungen im rechten Teilbaum sind *größer*.
- **Suchen nach einem Item m** : Vergleiche mit Markierung im aktuellem Knoten,
 - wenn gleich, stoppe und gebe True zurück,

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



- *Suchbäume* realisieren Wörterbücher und dienen dazu, Items schnell wieder zu finden.
- Ein **Suchbaum** ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaften** erfüllt:
 - Alle Markierungen im linken Teilbaum sind *kleiner* als die aktuelle Knotenmarkierung, alle Markierungen im rechten Teilbaum sind *größer*.
- **Suchen nach einem Item m** : Vergleiche mit Markierung im aktuellem Knoten,
 - wenn gleich, stoppe und gebe True zurück,
 - wenn m kleiner ist, suche im linken Teilbaum,

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



- *Suchbäume* realisieren Wörterbücher und dienen dazu, Items schnell wieder zu finden.
- Ein **Suchbaum** ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaften** erfüllt:
 - Alle Markierungen im linken Teilbaum sind *kleiner* als die aktuelle Knotenmarkierung, alle Markierungen im rechten Teilbaum sind *größer*.
- **Suchen nach einem Item m** : Vergleiche mit Markierung im aktuellem Knoten,
 - wenn gleich, stoppe und gebe True zurück,
 - wenn m kleiner ist, suche im linken Teilbaum,
 - wenn m größer ist, such im rechten Teilbaum.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



- *Suchbäume* realisieren Wörterbücher und dienen dazu, Items schnell wieder zu finden.
- Ein **Suchbaum** ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaften** erfüllt:
 - Alle Markierungen im linken Teilbaum sind *kleiner* als die aktuelle Knotenmarkierung, alle Markierungen im rechten Teilbaum sind *größer*.
- **Suchen nach einem Item m** : Vergleiche mit Markierung im aktuellem Knoten,
 - wenn gleich, stoppe und gebe True zurück,
 - wenn m kleiner ist, suche im linken Teilbaum,
 - wenn m größer ist, such im rechten Teilbaum.
- Suchzeit ist proportional zur **Höhe des Baums**! Im besten Fall *logarithmisch in der Größe des Baums*.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



Search in search tree

```
def search(tree : Optional[Node], item : Any) -> bool:
    if tree is None:
        return False
    elif tree.mark == item:
        return True
    elif tree.mark > item:
        return search(tree.left, item)
    else:
        return search(tree.right, item)

# smaller values left, bigger values in right subtree
nums = Node(10, Node(5, leaf(1), None),
            Node(15, leaf(12), leaf(20)))
print(search(nums, 12))
```

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammen-
fassung

Aufbauen eines Suchbaums

Immutable — unveränderlich



UNI
FREIBURG

- Aufruf `insert(tree, item)` für das Einsortieren von `item` in `tree`

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung

Aufbauen eines Suchbaums

Immutable — unveränderlich



UNI
FREIBURG

- Aufruf `insert(tree, item)` für das Einsortieren von `item` in `tree`
- Ist `tree` leer, so wird der Knoten `leaf(item)` zurückgegeben.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



- Aufruf `insert(tree, item)` für das Einsortieren von `item` in `tree`
- Ist `tree` leer, so wird der Knoten `leaf(item)` zurückgegeben.
- Wenn die Markierung `tree.mark` größer als `item` ist, wird `item` in den linken Teilbaum eingesetzt und der Baum rekonstruiert (das erhält die Suchbaumeigenschaft!).

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



- Aufruf `insert(tree, item)` für das Einsortieren von `item` in `tree`
- Ist `tree` leer, so wird der Knoten `leaf(item)` zurückgegeben.
- Wenn die Markierung `tree.mark` größer als `item` ist, wird `item` in den linken Teilbaum eingesetzt und der Baum rekonstruiert (das erhält die Suchbaumeigenschaft!).
- Falls `tree.mark` kleiner als `item` ist, entsprechend.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



- Aufruf `insert(tree, item)` für das Einsortieren von `item` in `tree`
- Ist `tree` leer, so wird der Knoten `leaf(item)` zurückgegeben.
- Wenn die Markierung `tree.mark` größer als `item` ist, wird `item` in den linken Teilbaum eingesetzt und der Baum rekonstruiert (das erhält die Suchbaumeigenschaft!).
- Falls `tree.mark` kleiner als `item` ist, entsprechend.
- Falls `tree.mark == item` müssen wir nichts machen.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



Creating a search tree

```
def insert(
    tree : Optional[Node], item : Any
    ) -> Node:
if tree is None:
    return leaf(item)
elif tree.mark > item:
    return Node (tree.mark,
                 insert (tree.left, item),
                 tree.right)
elif tree.mark < item:
    return Node (tree.mark,
                 tree.left,
                 insert(tree.right, item))
else:
    return tree
```

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



```
def insertall (tree : Optional[Node],
              lst  : list[Any]
              ) -> Optional[Node]:
    for key in lst
        tree = insert (tree, key)
    return tree

bst = insertall (None, [10, 15, 20, 12, 5, 1])
```

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



Creating a mutable search tree

```
def insertm(tree : Optional[Node],
            item : Any
            ) -> Node:
    if tree is None:
        return leaf(item)
    if tree.mark > item:
        tree.left = insertm(tree.left, item)
    elif tree.mark < item:
        tree.right = insertm(tree.right, item)
    return tree
```

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



```
def insertmall (tree : Optional[Node],
               lst  : list[Any]
               ) -> Optional[Node]:
    for key in lst
        tree = insertm (tree, key)
    return tree

bst = insertmall (None, [10, 15, 20, 12, 5, 1])
```

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Definition

Suche

Aufbau

Zusammenfassung



Zusammenfassung

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der **Baum** ist eine Struktur, die in der Informatik allgegenwärtig ist.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der **Baum** ist eine Struktur, die in der Informatik allgegenwärtig ist.
- **Binärbäume** sind Bäume, bei denen jeder Knoten genau zwei Teilbäume besitzt.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Zusammen-
fassung



- Der **Baum** ist eine Struktur, die in der Informatik allgegenwärtig ist.
- **Binärbäume** sind Bäume, bei denen jeder Knoten genau zwei Teilbäume besitzt.
- Operationen über (Binär-)Bäumen lassen sich einfach als **rekursive Funktionen** implementieren.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Der **Baum** ist eine Struktur, die in der Informatik allgegenwärtig ist.
- **Binärbäume** sind Bäume, bei denen jeder Knoten genau zwei Teilbäume besitzt.
- Operationen über (Binär-)Bäumen lassen sich einfach als **rekursive Funktionen** implementieren.
- Es gibt drei Hauptarten der **Traversierung** von Binärbäumen: pre-order, post-order, in-order.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Der **Baum** ist eine Struktur, die in der Informatik allgegenwärtig ist.
- **Binärbäume** sind Bäume, bei denen jeder Knoten genau zwei Teilbäume besitzt.
- Operationen über (Binär-)Bäumen lassen sich einfach als **rekursive Funktionen** implementieren.
- Es gibt drei Hauptarten der **Traversierung** von Binärbäumen: pre-order, post-order, in-order.
- **Suchbäume** sind Binärbäume, die die Suchbaumeigenschaft besitzen, d.h. im linken Teilbaum sind nur kleinere, im rechten nur größere Markierungen als an der Wurzel.

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung



- Der **Baum** ist eine Struktur, die in der Informatik allgegenwärtig ist.
- **Binärbäume** sind Bäume, bei denen jeder Knoten genau zwei Teilbäume besitzt.
- Operationen über (Binär-)Bäumen lassen sich einfach als **rekursive Funktionen** implementieren.
- Es gibt drei Hauptarten der **Traversierung** von Binärbäumen: pre-order, post-order, in-order.
- **Suchbäume** sind Binärbäume, die die Suchbaumeigenschaft besitzen, d.h. im linken Teilbaum sind nur kleinere, im rechten nur größere Markierungen als an der Wurzel.
- Das **Suchen** und **Einfügen** kann durch einfache rekursive Funktionen realisiert werden. **Sortierte Ausgabe** ist auch sehr einfach!

Der Baum

Binärbäume

Suchbäume

Zusammenfassung