

Informatik I: Einführung in die Programmierung

15. Rekursion, Endrekursion, Iteration

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



UNI
FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann

19. Dezember 2022



Rekursion

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition

Eine Funktion f ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von f enthält.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition

Eine Funktion f ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von f enthält.

Beispiel (Zweierlogarithmus)

```
def l2 (n : int) -> int:  
  if n == 0:  
    return -1  
  else:  
    return l2 (n // 2) + 1
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition

Eine Funktion f ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von f enthält.

Beispiel (Zweierlogarithmus)

```
def l2 (n : int) -> int:  
  if n == 0:  
    return -1  
  else:  
    return l2 (n // 2) + 1
```

- Problem: Termination (vgl. while Schleife)

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition

Eine Funktion f ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von f enthält.

Beispiel (Zweierlogarithmus)

```
def l2 (n : int) -> int:  
  if n == 0:  
    return -1  
  else:  
    return l2 (n // 2) + 1
```

- Problem: Termination (vgl. while Schleife)
- Bekannt von Funktionen auf Bäumen: rekursive Aufrufe nur auf Teilbaum \Rightarrow Termination.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition

Eine Funktion f ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von f enthält.

Beispiel (Zweierlogarithmus)

```
def l2 (n : int) -> int:  
  if n == 0:  
    return -1  
  else:  
    return l2 (n // 2) + 1
```

- Problem: Termination (vgl. while Schleife)
- Bekannt von Funktionen auf Bäumen: rekursive Aufrufe nur auf Teilbaum \Rightarrow Termination.
- Allgemein müssen die Argumente eines rekursiven Aufrufs "kleiner" sein, als die Argumente der Funktion \Rightarrow Termination.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Bäume sind induktiv definiert:
 - Ein Baum ist entweder leer \square oder
 - ein Knoten mit einer Markierung und einer Liste von Teilbäumen.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Bäume sind induktiv definiert:
 - Ein Baum ist entweder leer \square oder
 - ein Knoten mit einer Markierung und einer Liste von Teilbäumen.
- Schema für Funktionen F auf Bäumen, die natürlich rekursiv sind:

- $F(\square) = A$

- $F \left(\begin{array}{c} \text{mark} \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ t_0 \quad \dots \quad t_{n-1} \end{array} \right) = B(\text{mark}, F(t_0), \dots, F(t_{n-1}))$

- B ist ein Programmstück, das die Markierung der Wurzel, sowie die Ergebnisse der **Funktionsaufrufe von F auf den Teilbäumen** verwenden darf.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
@dataclass
class Tree:
    mark : Any
    children : list['Tree']

def tree_skeleton (tree : Optional[Tree]) -> Any:
    match tree:
        case None:
            return "A" # result for empty tree
        case Tree (mark, children):
            # compute B from
            # - mark
            # - tree_skeleton(children[0])
            # - ...
            # - tree_skeleton(children[n-1])
            # where n = len (children)
            return "B"
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Binäre Suche

Rekursion

**Binäre
Suche**

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Jede Rekursion folgt einer Baumstruktur



Binäre Suche

- Eingabe
 - `lst : list[T]` aufsteigend sortierte Liste
 - `key : T` Suchbegriff
- Ausgabe
 - `i` sodass `lst[i] == key`, falls `key in lst`
 - andernfalls: `None`

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Jede Rekursion folgt einer Baumstruktur



Binäre Suche

- Eingabe
 - `lst : list[T]` aufsteigend sortierte Liste
 - `key : T` Suchbegriff
- Ausgabe
 - `i` sodass `lst[i] == key`, falls `key` in `lst`
 - andernfalls: `None`

Idee

- Betrachte die Liste wie einen binären Suchbaum
- Wähle ein beliebiges Element als Wurzel: alle Elemente links davon sind kleiner, rechts davon größer
- Optimierte die Effizienz durch geschickte Wahl der Wurzel (in der Mitte)

Rekursion

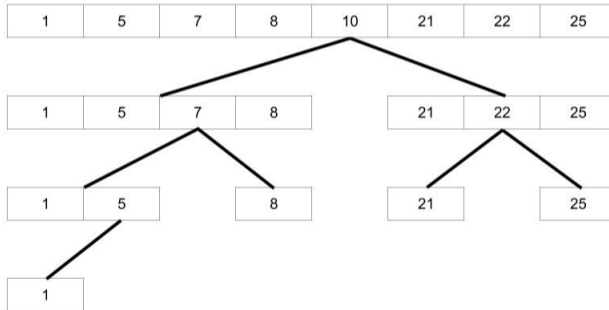
Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Rekursion

Binäre
Suche

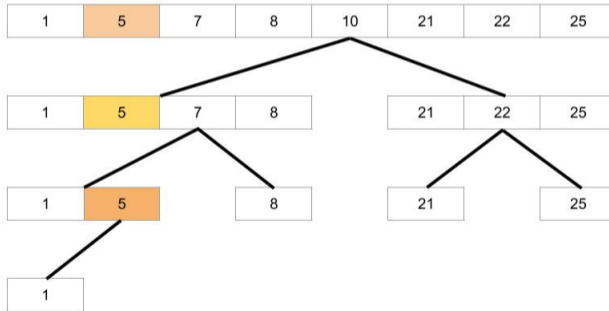
Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Binäre Suche (5) = 1



Rekursion

Binäre
Suche

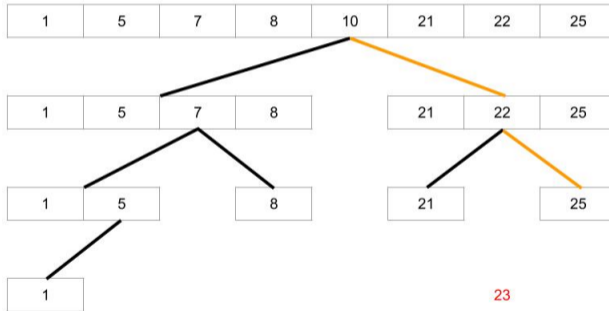
Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Binäre Suche (23) = None



Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Binäre Suche

Elementtyp int



```
def bsearch (lst : list[int], key : int) -> Optional[int]:
    n = len (lst)
    if n == 0:
        return None # key not in empty list
    m = n//2          # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch (lst[:m], key)
    else: # lst[m] < key
        r = bsearch (lst[m+1:], key)
        return None if r is None else r+m+1
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Funktioniert ..., aber `lst[:m]` und `lst[m+1:]` erzeugen jeweils **Kopien** der halben Liste (→ ineffizient!)

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Funktioniert ..., aber `lst[:m]` und `lst[m+1:]` erzeugen jeweils **Kopien** der halben Liste (\rightarrow ineffizient!)
- Alternative: Suche jeweils zwischen Startpunkt und Endpunkt in `lst`

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Funktioniert ..., aber `lst[:m]` und `lst[m+1:]` erzeugen jeweils **Kopien** der halben Liste (\rightarrow ineffizient!)
- Alternative: Suche jeweils zwischen Startpunkt und Endpunkt in `lst`
- Der rekursive Aufruf muss nur den Start- bzw. Endpunkt verschieben

```
def bsearch (lst : list[int], key : int) -> Optional[int]:  
    return bsearch2 (lst, key, 0, len (lst))
```

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int,  
             low : int, high : int) -> Optional[int]:
```

```
    """ search for key in lst between low  
    (inclusive) and high (exclusive)  
    assumes low <= high """
```

```
    ...
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Binäre Suche ohne Kopieren



```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]
  n = hi - lo      # length of list segment
  if n == 0:
    return None # key not in empty segment
  m = lo + n//2   # position of root
  if lst[m] == key:
    return m
  elif lst[m] > key:
    return bsearch2 (lst, key, lo, m)
  else: # lst[m] < key
    return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Binäre Suche ohne Kopieren



```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]
  n = hi - lo      # length of list segment
  if n == 0:
    return None # key not in empty segment
  m = lo + n//2   # position of root
  if lst[m] == key:
    return m
  elif lst[m] > key:
    return bsearch2 (lst, key, lo, m)
  else: # lst[m] < key
    return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beobachtungen

Binäre Suche ohne Kopieren



```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]
  n = hi - lo      # length of list segment
  if n == 0:
    return None # key not in empty segment
  m = lo + n//2   # position of root
  if lst[m] == key:
    return m
  elif lst[m] > key:
    return bsearch2 (lst, key, lo, m)
  else: # lst[m] < key
    return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beobachtungen

- Der Test $n == 0$ entspricht $hi - lo == 0$ und damit $lo == hi$

Binäre Suche ohne Kopieren



```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    n = hi - lo      # length of list segment
    if n == 0:
        return None # key not in empty segment
    m = lo + n//2   # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beobachtungen

- Der Test $n == 0$ entspricht $hi - lo == 0$ und damit $lo == hi$
- $lo + (hi - lo)//2 == (lo + hi)//2$

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht



```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]
  if lo == hi:
    return None # key not in empty segment
  m = (lo + hi)//2 # position of root
  if lst[m] == key:
    return m
  elif lst[m] > key:
    return bsearch2 (lst, key, lo, m)
  else: # lst[m] < key
    return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht



```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]
  if lo == hi:
    return None # key not in empty segment
  m = (lo + hi)//2 # position of root
  if lst[m] == key:
    return m
  elif lst[m] > key:
    return bsearch2 (lst, key, lo, m)
  else: # lst[m] < key
    return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beobachtungen

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht



```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]
  if lo == hi:
    return None # key not in empty segment
  m = (lo + hi)//2 # position of root
  if lst[m] == key:
    return m
  elif lst[m] > key:
    return bsearch2 (lst, key, lo, m)
  else: # lst[m] < key
    return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beobachtungen

- Jeder rekursive Aufruf von `bsearch2` erfolgt in einer `return` Anweisung.

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht



```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]
  if lo == hi:
    return None # key not in empty segment
  m = (lo + hi)//2 # position of root
  if lst[m] == key:
    return m
  elif lst[m] > key:
    return bsearch2 (lst, key, lo, m)
  else: # lst[m] < key
    return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beobachtungen

- Jeder rekursive Aufruf von `bsearch2` erfolgt in einer `return` Anweisung.
- Solche Aufrufe heißen **endrekursiv**.



Definition

Eine Funktion ist **endrekursiv**, falls alle rekursiven Aufrufe endrekursiv sind.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition

Eine Funktion ist **endrekursiv**, falls alle rekursiven Aufrufe endrekursiv sind.

Elimination von Endrekursion durch Iteration

- Jede endrekursive Funktion kann durch eine `while`-Schleife (**Iteration**) implementiert werden.
- Die **Abbruchbedingung** der Rekursion wird **negiert zur Bedingung** der `while`-Schleife.
- Der Rest des Funktionsrumpfs wird zum Rumpf der `while`-Schleife.
- Die **endrekursiven Aufrufe** werden zu **Zuweisungen an die Parameter**.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition

Eine Funktion ist **endrekursiv**, falls alle rekursiven Aufrufe endrekursiv sind.

Elimination von Endrekursion durch Iteration

- Jede endrekursive Funktion kann durch eine `while`-Schleife (**Iteration**) implementiert werden.
- Die **Abbruchbedingung** der Rekursion wird **negiert zur Bedingung** der `while`-Schleife.
- Der Rest des Funktionsrumpfs wird zum Rumpf der `while`-Schleife.
- Die **endrekursiven Aufrufe** werden zu **Zuweisungen an die Parameter**.

Warum?

In Python sind `while`-Schleifen effizienter als rekursive Funktionen.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Abbruchbedingung der Rekursion

```
if lo == hi:  
    return None
```

wird negiert zur Bedingung der `while`-Schleife

```
while lo != hi:  
    ...  
else:  
    return None
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Endrekursive Aufrufe

```
return bsearch2 (lst, key, lo, m)
```

werden zu Zuweisungen an die Parameter

```
lst, key, lo, hi = lst, key, lo, m
```

bzw. hier reicht

```
hi = m
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def bsearch2 (
    lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    while lo != hi:
        m = (lo + hi)//2
        if lst[m] == key:
            return m
        elif lst[m] > key:
            hi = m      # bsearch2 (lst, key, lo, m)
        else: # lst[m] < key
            lo = m+1    # bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
    else:
        return None
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Erinnerung: Suche im binären Suchbaum

Ebenfalls endrekursiv



```
def search(tree : Optional[Node], item : Any) -> bool:
  if tree is None:
    return False
  elif tree.mark == item:
    return True
  elif tree.mark > item:
    return search(tree.left, item)
  else:
    return search(tree.right, item)
```

- Gleiches Muster ... nicht überraschend

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Suche im binären Suchbaum

Iterativ, umgewandelt gemäß Schema



```
def search(tree : Optional[Node], item : Any) -> bool:
    while tree is not None:
        if tree.mark == item:
            return True
        elif tree.mark > item:
            tree = tree.left
        else:
            tree = tree.right
    else:
        return False
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Potenzieren

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren



- Mathematische Definition: $x^0 = 1$ $x^{n+1} = x \cdot x^n$

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren



- Mathematische Definition: $x^0 = 1$ $x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder “informatisch” hingeschrieben
`power (x, 0) == 1`
`power (x, n+1) == x * power (x, n)`

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Mathematische Definition: $x^0 = 1$ $x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder “informatisch” hingeschrieben
 `power (x, 0) == 1`
 `power (x, n+1) == x * power (x, n)`
- Wo ist da der Baum?

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Mathematische Definition: $x^0 = 1$ $x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder “informatisch” hingeschrieben
 `power (x, 0) == 1`
 `power (x, n+1) == x * power (x, n)`
- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Mathematische Definition: $x^0 = 1$ $x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder “informatisch” hingeschrieben
`power (x, 0) == 1`
`power (x, n+1) == x * power (x, n)`
- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
 - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Mathematische Definition: $x^0 = 1$ $x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Oder “informatisch” hingeschrieben
`power (x, 0) == 1`
`power (x, n+1) == x * power (x, n)`
- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
 - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder
 - der Nachfolger $1 + (n)$ einer natürlichen Zahl n .

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Mathematische Definition: $x^0 = 1$ $x^{n+1} = x \cdot x^n$

- Oder “informatisch” hingeschrieben

`power (x, 0) == 1`

`power (x, n+1) == x * power (x, n)`

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
 - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder
 - der Nachfolger $1 + (n)$ einer natürlichen Zahl n .

- Als Baum: 0 1+
- |
- n

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Mathematische Definition: $x^0 = 1$ $x^{n+1} = x \cdot x^n$

- Oder “informatisch” hingeschrieben

`power (x, 0) == 1`

`power (x, n+1) == x * power (x, n)`

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
 - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder
 - der Nachfolger $1 + (n)$ einer natürlichen Zahl n .

- Als Baum: 0 1+
- |
- n

- Daraus ergibt sich das Codegerüst.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power (x : complex, n : int) -> complex:
    """ x ** n for n >= 0 """
    if n == 0:
        return 1
    else: # n = 1+n'
        return x * power (x, n-1)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

→ `power(2,3)` wählt else-Zweig und ruft auf:

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

→ `power(2,3)` wählt else-Zweig und ruft auf:
→ `power(2,2)` wählt else-Zweig und ruft auf:

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

- `power(2,3)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,2)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,1)` wählt else-Zweig und ruft auf:

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

- `power(2,3)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,2)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,1)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,0)` wählt if-Zweig und:

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

- `power(2,3)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,2)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,1)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,0)` wählt if-Zweig und:
 - ← `power(2,0)` gibt 1 zurück

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

- `power(2,3)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,2)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,1)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,0)` wählt if-Zweig und:
 - ← `power(2,0)` gibt 1 zurück
 - ← `power(2,1)` gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

- `power(2,3)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,2)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,1)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 - `power(2,0)` wählt if-Zweig und:
 - ← `power(2,0)` gibt 1 zurück
 - ← `power(2,1)` gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück
 - ← `power(2,2)` gibt $(2 \times 2) = 4$ zurück

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

→ `power(2,3)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 → `power(2,2)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 → `power(2,1)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 → `power(2,0)` wählt if-Zweig und:
 ← `power(2,0)` gibt 1 zurück
 ← `power(2,1)` gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück
 ← `power(2,2)` gibt $(2 \times 2) = 4$ zurück
 ← `power(2,3)` gibt $(2 \times 4) = 8$ zurück

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

→ `power(2,3)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 → `power(2,2)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 → `power(2,1)` wählt else-Zweig und ruft auf:
 → `power(2,0)` wählt if-Zweig und:
 ← `power(2,0)` gibt 1 zurück
 ← `power(2,1)` gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück
 ← `power(2,2)` gibt $(2 \times 2) = 4$ zurück
 ← `power(2,3)` gibt $(2 \times 4) = 8$ zurück

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Power ist **nicht** endrekursiv



```
def power (x : complex, n : int) -> complex:  
  if n==0:  
    return 1  
  else:  
    return x * power (x, n-1)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Power ist **nicht** endrekursiv



```
def power (x : complex, n : int) -> complex:  
  if n==0:  
    return 1  
  else:  
    return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch in einem **akkumulierenden Argument** berechnen.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Power ist **nicht** endrekursiv



```
def power (x : complex, n : int) -> complex:  
  if n==0:  
    return 1  
  else:  
    return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch in einem **akkumulierenden Argument** berechnen.

```
def power_acc (x : complex, n : int, acc : complex) -> complex:  
  if n==0:  
    return acc  
  else:  
    return power_acc (x, n-1, acc * x)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Power ist **nicht** endrekursiv



```
def power (x : complex, n : int) -> complex:  
  if n==0:  
    return 1  
  else:  
    return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch in einem **akkumulierenden Argument** berechnen.

```
def power_acc (x : complex, n : int, acc : complex) -> complex:  
  if n==0:  
    return acc  
  else:  
    return power_acc (x, n-1, acc * x)
```

- Aufruf mit `power_acc (x, n, 1)`; `power_acc` ist endrekursiv ...

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



■ Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex = 1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex = 1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

- Startwert $acc = 1$ im Funktionskopf definiert.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



■ Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex = 1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

- Startwert `acc = 1` im Funktionskopf definiert.
- Jeder Aufruf `power_it (x, n)` verwendet `acc=1`.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



■ Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex = 1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

- Startwert `acc = 1` im Funktionskopf definiert.
- Jeder Aufruf `power_it (x, n)` verwendet `acc=1`.
- Ein Aufruf (z.B.) `power_it (x, n, 42)` startet mit `acc=42`.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Rekursive
Definition

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Schneller Potenzieren

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)`?

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

■ `power (x, 0)?` 0

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?`

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?`

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` **0**
- `power (x, 1)?` **1**
- `power (x, 2)?` **2**
- `power (x, n)?`

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` **0**
- `power (x, 1)?` **1**
- `power (x, 2)?` **2**
- `power (x, n)?` **n**

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def power_it (x : complex, n : int, acc : complex=1):  
    while n != 0:  
        n, acc = n-1, acc*x  
    else:  
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2
- `power (x, n)?` n

Mehr Multiplikationen als unbedingt notwendig!

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Alternative Definition von Power



```
power(x, 0)      == 1
power(x, 2*n)    == power(x*x, n)      # n>0
power(x, 2*n+1) == x * power(x*x, n)  # n>=0
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Alternative Definition von Power



```
power(x, 0)      == 1
power(x, 2*n)    == power(x*x, n)      # n > 0
power(x, 2*n+1) == x * power(x*x, n)  # n >= 0
```

- Alternative Aufteilung der natürlichen Zahlen.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
power(x, 0)      == 1
power(x, 2*n)    == power(x*x, n)      # n>0
power(x, 2*n+1) == x * power(x*x, n)  # n>=0
```

- Alternative Aufteilung der natürlichen Zahlen.
- Jede natürliche Zahl ungleich 0 ist entweder gerade oder ungerade.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
power(x, 0)      == 1
power(x, 2*n)    == power(x*x, n)      # n>0
power(x, 2*n+1) == x * power(x*x, n)  # n>=0
```

- Alternative Aufteilung der natürlichen Zahlen.
- Jede natürliche Zahl ungleich 0 ist entweder gerade oder ungerade.
- In jedem Fall können wir die Berechnung von `power` entweder sofort abbrechen oder auf die `power` mit einem echt kleineren Exponenten `n` zurückführen.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$?

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$?

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
  if n == 0:
    return 1
  elif n % 2 == 0:
    return fast_power (x*x, n//2)
  else: # n % 2 == 1
    return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$?

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$?

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? $k+2$

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? $k+2$
- Multiplikationen für $n < 2^k$: höchstens $2k \approx 2 \log_2 n$.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? $k+2$
- Multiplikationen für $n < 2^k$: höchstens $2k \approx 2 \log_2 n$.
- Schneller als die `power` Funktion: logarithmisch viele Multiplikationen!

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? $k+2$
- Multiplikationen für $n < 2^k$: höchstens $2k \approx 2 \log_2 n$.
- Schneller als die `power` Funktion: logarithmisch viele Multiplikationen!
- Berechnung von $n//2$ und $n\%2$ ist billig. Warum?

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def fast_power (x : complex, n : int) -> complex:
  if n == 0:
    return 1
  elif n % 2 == 0:
    return fast_power (x*x, n//2)
  else: # n % 2 == 1
    return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Nicht endrekursiv!
- Aber es kann wieder ein akkumulierender Parameter eingeführt werden, der die äußeren Multiplikationen mit dem x durchführt.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Schnelle Exponentiation, endrekursiv!



```
def fast_power_acc (
    x : complex, n : int, acc : complex = 1) -> complex:
    if n == 0:
        return acc
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power_acc(x*x, n//2, acc)
    else: # n % 2 == 1
        return fast_power_acc(x*x, n//2, acc*x)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Schematische Transformation liefert

```
def fast_power_it (
    x : complex, n : int, acc : complex = 1) -> complex:
    while n != 0:
        if n % 2 == 0:
            x, n, acc = (x*x, n//2, acc)
        else: # n % 2 == 1
            x, n, acc = (x*x, n//2, acc*x)
    else:
        return acc
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Sortieren

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Sortieren

- Eingabe
 - Liste `lst` : `list[T]`
 - (Ordnung \leq auf den Listenelementen vom Typ `T`)
- Ausgabe
 - aufsteigend sortierte Liste (gemäß \leq)
 - jedes Element muss in der Ausgabe genauso oft vorkommen wie in der Eingabe

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Sortieren

- Eingabe
 - Liste `lst : list [T]`
 - (Ordnung \leq auf den Listenelementen vom Typ `T`)
- Ausgabe
 - aufsteigend sortierte Liste (gemäß \leq)
 - jedes Element muss in der Ausgabe genauso oft vorkommen wie in der Eingabe

Sortieren durch Partitionieren

- Quicksort
- Erdacht von Sir C.A.R. Hoare um 1960
- Lange Zeit einer der schnellsten Sortieralgorithmen

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Vorgehensweise

- Falls lst leer ist, so ist die Ausgabe die leere Liste.
- Sonst wähle ein Element p aus lst .
- Sei lst_{lo} die Liste der Elemente aus lst , die $\leq p$ sind.
- Sei lst_{hi} die Liste der Elemente aus lst , die nicht $\leq p$ sind.
- Sortiere lst_{lo} und lst_{hi} mit Ergebnissen $sort_{lo}$ und $sort_{hi}$.
- Dann ist $sort_{lo} + [p] + sort_{hi}$ eine sortierte Version von lst .

Rekursion

Binäre
Suche

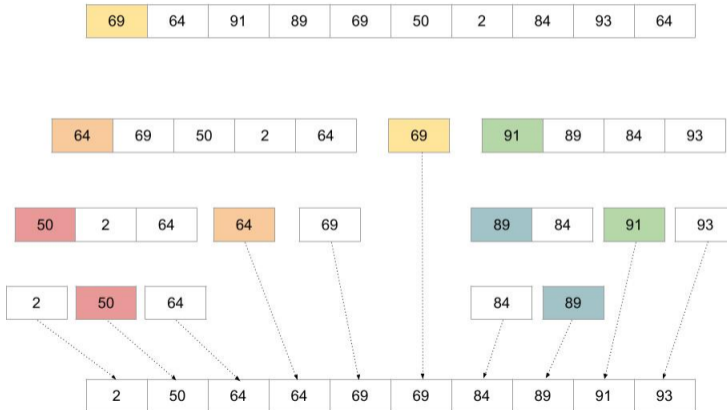
Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Quicksort Beispiel



Rekursion

Binäre
Suche

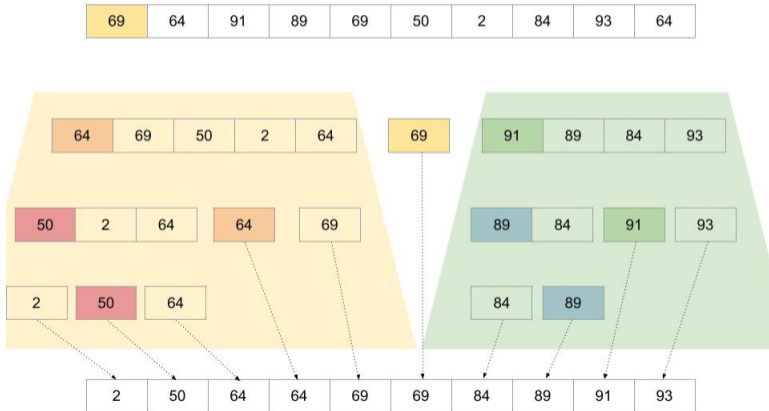
Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Quicksort Beispiel



Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def quicksort (lst : list[int]) -> list[int]:  
    if len (lst) <= 1:  
        return lst  
    else:  
        p, lst_lo, lst_hi = partition (lst)  
        return (quicksort (lst_lo)  
                + [p]  
                + quicksort (lst_hi))
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def quicksort (lst : list[int]) -> list[int]:  
    if len (lst) <= 1:  
        return lst  
    else:  
        p, lst_lo, lst_hi = partition (lst)  
        return (quicksort (lst_lo)  
                + [p]  
                + quicksort (lst_hi))
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Wunschdenken

- Wir nehmen an, dass `partition (lst)` für `len (lst) >= 1` ein 3-Tupel liefert, wobei
 - `p` ist ein Element von `lst`
 - `lst_lo` enthält die Elemente `z` von `lst` mit `z <= p`
 - `lst_hi` enthält die Elemente `z` von `lst` mit `z > p`



```
def partition (lst : list[int]) -> tuple[int, list[int], list[int]]:
    """ assume len (lst) >= 1 """
    p, rest = lst[0], lst[1:]
    lst_lo = []
    lst_hi = []
    for x in rest:
        if x <= p:
            lst_lo = lst_lo + [x]
        else:
            lst_hi = lst_hi + [x]
    return p, lst_lo, lst_hi
```

- Codegerüst für Listenverarbeitung
- Zwei Akkumulatoren `lst_lo` und `lst_hi`

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Der rekursive Algorithmus ist die einfachste Beschreibung von Quicksort.
- Eine iterative Implementierung ist möglich.
- Diese ist aber deutlich schwieriger zu verstehen.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Lindenmayer Systeme

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Wikipedia

Bei den Lindenmayer- oder L-Systemen handelt es sich um einen mathematischen Formalismus, der 1968 von dem ungarischen theoretischen Biologen Aristid Lindenmayer als Grundlage einer axiomatischen Theorie biologischer Entwicklung vorgeschlagen wurde. In jüngerer Zeit fanden L-Systeme Anwendung in der Computergrafik bei der Erzeugung von Fraktalen und in der realitätsnahen Modellierung von Pflanzen.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Wikipedia

Bei den Lindenmayer- oder L-Systemen handelt es sich um einen mathematischen Formalismus, der 1968 von dem ungarischen theoretischen Biologen Aristid Lindenmayer als Grundlage einer axiomatischen Theorie biologischer Entwicklung vorgeschlagen wurde. In jüngerer Zeit fanden L-Systeme **Anwendung in der Computergrafik bei der Erzeugung von Fraktalen** und in der realitätsnahen Modellierung von Pflanzen.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition

Ein **0L-System** ist ein Tupel $G = (V, \omega, P)$. Dabei ist

- V eine Menge von Symbolen (Alphabet),
- $\omega \in V^*$ ein String von Symbolen und
- $P \subseteq V \times V^*$ eine Menge von **Produktionen**, sodass zu jedem $A \in V$ mindestens eine Produktion $(A, w) \in P$ existiert.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition

Ein **0L-System** ist ein Tupel $G = (V, \omega, P)$. Dabei ist

- V eine Menge von Symbolen (Alphabet),
- $\omega \in V^*$ ein String von Symbolen und
- $P \subseteq V \times V^*$ eine Menge von **Produktionen**, sodass zu jedem $A \in V$ mindestens eine Produktion $(A, w) \in P$ existiert.

Beispiel (Lindenmayer): 0L-System für Algenwachstum

- $V = \{A, B\}$
- $\omega = A$
- $P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Definition (Berechnungsrelation eines 0L-Systems)

Sei $G = (V, \omega, P)$ ein 0L-System.

Sei $A_1A_2 \dots A_n$ ein String über Symbolen aus V (also $A_i \in V$).

Ein **Rechenschritt von G** ersetzt **jedes** Symbol durch eine zugehörige rechte Produktionsseite:

$$A_1A_2 \dots A_n \Rightarrow w_1w_2 \dots w_n$$

wobei $(A_i, w_i) \in P$, für $1 \leq i \leq n$.

Die **Sprache von G** besteht aus allen Strings, die aus ω durch endlich viele \Rightarrow -Schritte erzeugt werden können.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beispiel: Algenwachstum



$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

1 A

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beispiel: Algenwachstum



$$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$$

1 A

2 BA

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beispiel: Algenwachstum



$V = \{A, B\}$, $\omega = A$, $P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

- 1 A
- 2 BA
- 3 ABA

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beispiel: Algenwachstum



$V = \{A, B\}$, $\omega = A$, $P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

- 1 A
- 2 BA
- 3 ABA
- 4 $BAABA$

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beispiel: Algenwachstum



$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

- 1 A
- 2 BA
- 3 ABA
- 4 $BAABA$
- 5 $ABABAABA$

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beispiel: Algenwachstum



$V = \{A, B\}$, $\omega = A$, $P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

- 1 A
- 2 BA
- 3 ABA
- 4 $BAABA$
- 5 $ABABAABA$
- 6 $BAABAABABAABA$

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beispiel: Algenwachstum



$V = \{A, B\}$, $\omega = A$, $P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

- 1 A
- 2 BA
- 3 ABA
- 4 $BAABA$
- 5 $ABABAABA$
- 6 $BAABAABABAABA$
- 7 $ABABAABABAABAABABAABA$

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Beispiel: Algenwachstum



$V = \{A, B\}$, $\omega = A$, $P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

- 1 A
- 2 BA
- 3 ABA
- 4 $BAABA$
- 5 $ABABAABA$
- 6 $BAABAABABAABA$
- 7 $ABABAABABAABAABABAABA$
- 8 USW

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Die Kochkurve ist ein Fraktal.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Die **Kochkurve** ist ein **Fraktal**.
- D.h. eine selbstähnliche Kurve mit rekursiver Beschreibung und weiteren spannenden Eigenschaften.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

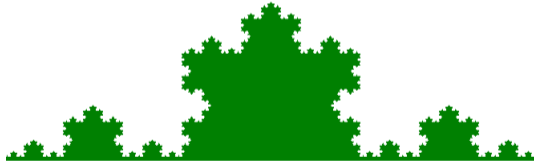
Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Die **Kochkurve** ist ein **Fraktal**.
- D.h. eine selbstähnliche Kurve mit rekursiver Beschreibung und weiteren spannenden Eigenschaften.



<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kochkurve.png>

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- Die **Kochkurve** ist ein **Fraktal**.
- D.h. eine selbstähnliche Kurve mit rekursiver Beschreibung und weiteren spannenden Eigenschaften.



<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kochkurve.png>

- Sie kann durch ein 0L-System beschrieben werden.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



0L-System für die Kochkurve

- $V = \{F, +, -\}$
- $\omega = F$
- $P = \{F \mapsto F + F - F + F\}$ sowie $+ \mapsto +$ und $- \mapsto -$

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



0L-System für die Kochkurve

- $V = \{F, +, -\}$
- $\omega = F$
- $P = \{F \mapsto F + F - F + F\}$ sowie $+ \mapsto +$ und $- \mapsto -$

Interpretation der Symbole als Zeichenoperationen

- F Strecke vorwärts zeichnen
- $+$ um 60° nach links abbiegen
- $-$ um 120° nach rechts abbiegen

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Idee der "Schildkrötengrafik"

Eine Schildkröte sitzt auf einer Zeichenfläche. Sie kann eine bestimmte Strecke geradeaus gehen oder abbiegen. Sie kann den Hintern heben und absenken. Wenn ihr Hintern dabei über den Boden schleift, hinterläßt sie einen geraden Strich.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Idee der “Schildkrötengrafik”

Eine Schildkröte sitzt auf einer Zeichenfläche. Sie kann eine bestimmte Strecke geradeaus gehen oder abbiegen. Sie kann den Hintern heben und absenken. Wenn ihr Hintern dabei über den Boden schleift, hinterläßt sie einen geraden Strich.

Befehle an die Schildkröte

```
from turtle import *
pencolor('black') #use the force
pendown()         #let it all hang out
forward(100)
left(120)
forward(100)
left(120)
forward(100)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Schildkröten-Interpretation



Die Operationen

- F forward (size)
- + left (60)
- - right (120)

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Schildkröten-Interpretation



Die Operationen

- F forward (size)
- + left (60)
- - right (120)

Die Produktion $F \mapsto F + F - F + F$

```
def koch(size:float, n:int):  
    #...  
    koch(size/3, n-1) #F  
    left(60)          #+  
    koch(size/3, n-1) #F  
    right(120)        #-  
    koch(size/3, n-1) #F  
    left(60)          #+  
    koch(size/3, n-1) #F
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def koch (size:float, n:int):  
    if n == 0:  
        forward(size)  
    else:  
        koch (size/3, n-1)  
        left(60)  
        koch (size/3, n-1)  
        right(120)  
        koch (size/3, n-1)  
        left(60)  
        koch (size/3, n-1)
```

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



0L-System für fraktale Binärbäume

- $V = \{0, 1, [,]\}$
- $\omega = 0$
- $P = \{1 \mapsto 11, 0 \mapsto 1[0]0\}$

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



0L-System für fraktale Binärbäume

- $V = \{0, 1, [,]\}$
- $\omega = 0$
- $P = \{1 \mapsto 11, 0 \mapsto 1[0]0\}$

Interpretation

- 0 Strecke vorwärts zeichnen mit Blatt am Ende
- 1 Strecke vorwärts zeichnen
- [Position und Richtung merken und um 45° nach links abbiegen
-] Position und Richtung von zugehöriger öffnender Klammer wiederherstellen und um 45° nach rechts abbiegen

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



```
def btree_1 (size:float, n:int):  
    if n == 0:  
        forward (size)  
    else:  
        n = n - 1  
        btree_1 (size/3, n)  
        btree_1 (size/3, n)
```

- $n==0$: letzte Generation erreicht
- Faktor $1/3$ willkürlich gewählt

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme

Turtle-Graphics Implementierung Teil 0



```
def btree_0 (size:float, n:int):
    if n == 0:
        forward(size)           # line segment
        dot (2, 'green')        # draw leaf
    else:
        n = n - 1
        btree_1 (size/3, n)     # "1"
        pos = position()        # "["
        ang = heading()
        left(45)
        btree_0 (size/3, n)     # "0"
        penup()                 # "]"
        setposition (pos)
        setheading (ang)
        pendown()
        right (45)
        btree_0 (size/3, n)     # "0"
```

Rekursion

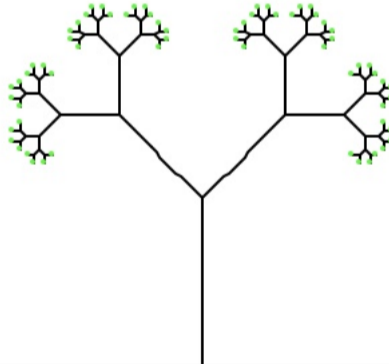
Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- **Induktion** ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- **Induktion** ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Funktionen auf induktiv definierten Daten (d.h. baumartigen Strukturen) sind generell rekursiv.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- **Induktion** ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Funktionen auf induktiv definierten Daten (d.h. baumartigen Strukturen) sind generell rekursiv.
- In Python ist Rekursion oft nicht die effizienteste Implementierung einer Funktion!

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- **Induktion** ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Funktionen auf induktiv definierten Daten (d.h. baumartigen Strukturen) sind generell rekursiv.
- In Python ist Rekursion oft nicht die effizienteste Implementierung einer Funktion!
- **Endrekursion** kann schematisch in effiziente **Iteration** umgewandelt werden.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme



- **Induktion** ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Funktionen auf induktiv definierten Daten (d.h. baumartigen Strukturen) sind generell rekursiv.
- In Python ist Rekursion oft nicht die effizienteste Implementierung einer Funktion!
- **Endrekursion** kann schematisch in effiziente **Iteration** umgewandelt werden.
- Jede rekursive Funktion lässt sich schematisch in eine äquivalente endrekursive Funktion umzuwandeln.

Rekursion

Binäre
Suche

Potenzieren

Schneller
Potenzieren

Sortieren

Lindenmayer
Systeme