Informatik I: Einführung in die Programmierung

16. Funktionale Programmierung

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. Peter Thiemann

10.01.2023

1 Funktionale Programmierung

Programmierparadigmen

- Es gibt verschiedene Programmierparadigmen oder Programmierstile.
- Imperative Programmierung beschreibt, wie etwas erreicht werden soll.
- Deklarative Programmierung beschreibt, was erreicht werden soll.

Imperative Programmierparadigmen

Imperative Programmierung

- Eine Programmausführung besitzt einen Zustand (aktuelle Werte der Variablen, Laufzeitkeller, etc).
- Die Anweisungen des Programms modifizieren den Zustand.
- Zentrales Programmelement ist die Zuweisung.

Organisation von imperativen Programmen

- Prozedural: Die Aufgabe wird in kleinere Teile – Prozeduren – zerlegt, die auf den Daten arbeiten. Beispielsprachen: Pascal, C
- Objekt-orientiert: Daten und ihre Methoden bilden eine Einheit, die gemeinsam zerlegt werden. Die Zerlegung wird durch Klassen beschrieben. Beispielsprachen: Smalltalk, Eiffel, Java.

Deklarative Programmierparadigmen

Deklarative Programmierung

- Keine explizite Bearbeitung eines Berechnungszustands.
- Logische Programmierung (LP) beschreibt das Ziel durch logische Formeln: Prolog, constraint programming, ASP.
- Funktionale Programmierung (FP) beschreibt das Ziel durch mathematische Funktionen: Haskell, OCaml, Racket, Clojure, Lisp
- Abfragesprachen wie SQL oder XQuery sind ebenfalls deklarativ und bauen auf der Relationenalgebra bzw. der XML-Algebra auf.

Eigenschaften funktionaler Programmierung

- Es gibt Funktionen höherer Ordnung, d.h. Funktionen, deren Argumente und/oder Ergebnisse selbst wieder Funktionen sind.
- Keine Schleifen, sondern nur Rekursion.
- Keine Anweisungen, sondern nur Ausdrücke.
  - Auch Funktionen sind als Ausdrücke definierbar.
- In rein funktionalen Sprachen: keine Zuweisungen und keine Seiteneffekte.
  - ⇒ Eine Variable erhält zu Beginn ihren Wert, der sich nicht mehr ändert.
  - ⇒ Alle Datenstrukturen sind unveränderlich.
  - ⇒ Referentielle Transparenz: Eine Funktion liefert immer das gleiche Ergebnis bei gleichen Argumenten.
- Die meisten funktionalen Sprachen besitzen ein starkes statisches Typsystem, sodass zur Laufzeit kein `TypeError` auftreten kann.

Attribute von Typsystemen

Stark vs. schwach

- In einem **starken** Typsystem besitzt jeder Wert einen unveränderlichen Typ.
- In einem **schwachen** Typsystem kann ein Wert je nach Kontext unterschiedliche Typen annehmen.

Statisch vs. dynamisch

- In einem **statischen** Typsystem wird vor Ausführung eines Programms eine Typüberprüfung durchgeführt. Das Programm kommt nur zur Ausführung, wenn diese Prüfung erfolgreich ist.
- In einem **dynamischen** Typsystem erfolgt die Typüberprüfung zur Laufzeit, vor Ausführung jeder Operation.
  - Flexibler als statische Typüberprüfung, aber meist weniger effizient!

2 FP in Python

FP in Python

- Funktionen werden durch Objekte repräsentiert.
- Funktionen höherer Ordnung werden voll unterstützt.
- Python besitzt ein starkes dynamisches Typsystem.
- Rein funktionale Programmiersprachen verwenden *Lazy Evaluation*:
  - Die Auswertung eines Ausdrucks wird nur dann angestoßen, wenn das Ergebnis benötigt wird.
  - Das gleiche gilt für Datenstrukturen, die sich erst entfalten, wenn ihre Inhalte benötigt werden.
- Python verwendet *Eager Evaluation*, d.h., jeder Ausdruck (insbesondere Argumente von Funktionen) wird ausgewertet; nur der Wert des Ausdrucks wird weiter verwendet.

FP in Python: Defizite

- Referentielle Transparenz kann in Python verletzt werden.
  Abhilfe: lokale Variablen nur einmal zuweisen, keine globalen Variablen nutzen, keine Mutables ändern.
  Die meisten Beispiele sind “mostly functional” in diesem Sinn.
  Vereinfacht Überlegungen zum aktuellen Zustand der Berechnung.
- Rekursion.
  Python limitiert die Rekursionstiefe, während funktionale Sprachen beliebige Rekursion erlauben und Endrekursion intern automatisch als Schleifen ausführen.
- Ausdrücke.
  Python verlangt Anweisungen in Funktionen, aber viel Funktionalität kann in Ausdrücke verschoben werden.

3 Funktionen definieren und verwenden

Funktionsdefinition und -verwendung

- Eine Funktion ist ein Python-Objekt.

```
>>> def simple() -> None:
...     print('invoked')
...
>>> simple   # keine Klammern -> Funktionsobjekt
<function simple at 0x10e574dc0>
>>> simple() # mit Klammern -> Funktionsaufruf
invoked
```

- Es kann zugewiesen werden, als Argument übergeben werden und als Funktionsresultat zurückgegeben werden.
- Und es ist aufrufbar vom Typ `Callable`...

Funktionsverwendung

```
>>> from typing import Callable
>>> spam = simple; print(spam)
<function simple at 0x10e574dc0>
>>> def call_twice(fun : Callable[[],None]) -> None:
...     fun(); fun()
...
>>> call_twice(spam) # keine Klammern hinter spam
invoked
invoked
>>> def gen_fun() -> Callable[[], None]:
...     return spam
...
>>> gen_fun()
<function simple at 0x10e574dc0>
>>> gen_fun()()
invoked
```

4 Lambda-Notation

Funktionen mit Lambda-Notation definieren

- Der `lambda`-Operator definiert eine kurze, namenlose Funktion, deren Rumpf durch einen Ausdruck gegeben ist.

```
>>> lambda x, y: x * y # multipliziere 2 Zahlen
<function <lambda> at 0x10e5752d0>
>>> (lambda x, y: x * y)(3, 8)
24
>>> mul = lambda x, y: x * y
```

Der Typ `Callable`

- Der Typ von `mul` kann nicht wie bei einer Definition geschrieben werden. Stattdessen verwende `typing.Callable`:

```
>>> from typing import Callable
>>> mul: Callable[[int, int], int] = lambda x, y: x * y
```

- Der allgemeine Typ einer Funktion ist `Callable[`*`ArgTypes`*`, `*`RetType`*`]` mit
  - *`ArgTypes`* ist eine Liste von Typen für die Parameter,
  - *`RetType`* ist der Typ des Rückgabewerts.
- Wird auch für Funktionsparameter verwendet, die selbst Funktionen sind.

Verwendung von Lambda-Funktionen (1)

```
>>> def mul2(x: int, y: int) -> int:
...     return x * y
...
>>> mul(4, 5) == mul2(4, 5)
True
```

- `mul2` ist äquivalent zu `mul`!
- Lambda-Funktionen werden hauptsächlich als Argumente für Funktionen (höherer Ordnung) benutzt.
- Solche Funktionen werden oft nur einmal verwendet und sind kurz, sodass sich die Vergabe eines Namens nicht lohnt.

Verwendung von Lambda-Funktionen (2)

Beispiel `cookie_lib.py`

```
# add cookies in order of most specific
# (i.e., longest) path first
cookies.sort(key=lambda arg: len(arg.path), reverse=True)
```

Verwendung von Lambda-Funktionen (3): Funktionsfabriken

- Funktionen können Funktionen zurückgeben. Auch die Ergebnisfunktion kann durch einen Lambda-Ausdruck definiert werden.
- Beispiel: Eine Funktion, die einen Addierer erzeugt, der immer eine vorgegebene Konstante addiert:

```
>>> def gen_adder(c : int) -> Callable[[int], int]:
...     return lambda x: x + c
...
>>> add5: Callable[[int], int] = gen_adder(5)
>>> add5(15)
20
```

5 Nützliche Funktionen höherer Ordnung: `map`, `filter` und `reduce`

map: Anwendung einer Funktion auf Iteratierbares

- map hat zwei Argumente: eine Funktion und ein iterierbares Objekt.
- map wendet die Funktion auf jedes Element der Eingabe an und liefert die Funktionswerte als Iterator ab.

```
>>> list(map(lambda x: x**2, range(10)))
[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]
```

Anwendungsbeispiel für map

- Wir wollen eine Liste `c_list` von Temperaturen von Celsius nach Fahrenheit konvertieren. Nach dem Muster zur Verarbeitung von Sequenzen:

ctof.py

```
def ctof(temp : float) -> float:
    return ((9 / 5) * temp + 32)
def list_ctof(cl : list[float]) -> list[float]:
    result = []
    for c in cl:
        result += [ctof(c)]
    return result
c_list = [16, 3, -2, -1, 2, 4]
f_list = list_ctof(c_list)
```

Anwendungsbeispiel für `map` (2)

- Mit `map` wesentlich knapper:

```
f_list = list(map(lambda c: 1.8 * c + 32, c_list))
```

- In diesem Fall: besser die benannte Funktion `ctof` verwenden (bessere Dokumentation, was die Funktion bedeuten soll).

map mit mehreren Eingaben

- `map` kann auch mit einer k-stelligen Funktion und k weiteren Eingaben aufgerufen werden ($k > 0$).
- Für jeden Funktionsaufruf wird ein Argument von jeder der k Eingaben angefordert. Stop, falls eine der Eingaben keinen Wert mehr liefert.
- Ein Beispiel (vgl. convolute0)

```
def convolute_0(
    xs :list[float], ys :list[float]) -> float:
    return sum(map(lambda x, y: x*y,
                   xs, reversed(ys)))
```

Zip aus map

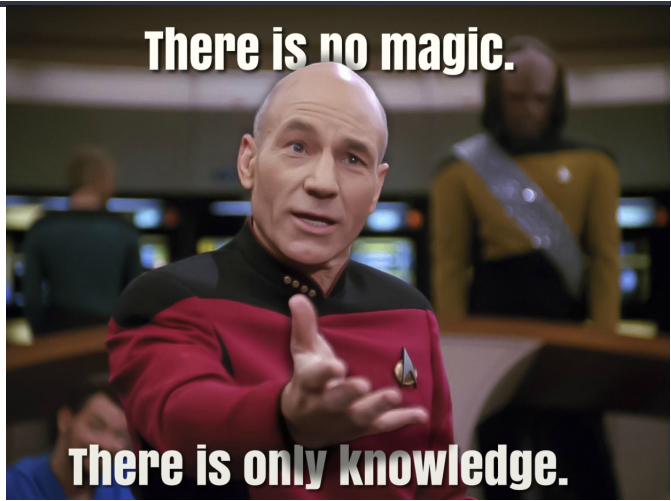
- Ein einfaches `zip` (das Original funktioniert auch mit > 2 Argumenten):

```
>>> list(map(lambda x, y: (x, y),
...          range(5), range(0, 50, 10)))
[(0, 0), (1, 10), (2, 20), (3, 30), (4, 40)]
```

- Volle Funktionalität von `zip` selbst gemacht:

```
def myzip(*args):
  return map(lambda *args: args, *args)
```

*arg?



Einschub: Variable Parameterlisten

- Eine Funktion kann eine variable Zahl von Argumenten akzeptieren.
- Schreibweise dafür

```
def func(a1, a2, a3, *args):
    for a in args:
        pass # process arguments 4, 5, ...
    goo(a1, *args)
```

- `func` muss mit mindestens drei Argumenten aufgerufen werden.
- Weitere Argumente werden als Tupel zusammengefasst der Variablen `args` zugewiesen.
- Der `*`-Operator kann auch in einer Liste von Ausdrücken auf ein iterierbares Argument angewendet werden.
- Er fügt die Elemente aus dem Iterator der Liste hinzu.

`filter`: Filtert unpassende Objekte aus

- `filter` erwartet als Argumente eine Funktion mit einem Parameter und ein iterierbares Objekt.
- Es liefert einen Iterator zurück, der die Objekte aufzählt, bei denen die Funktion nicht `False` (oder äquivalente Werte) zurück gibt.

```
>>> list(filter(lambda x: x > 0, [0, 3, -7, 9,  2]))
[3, 9, 2]
```

`partial`: Partielle Anwendung von Funktionen

- `from functools import partial`
- `partial (f, *args, **kwargs)` nimmt eine Funktion *f*, Argumente für *f* und Keywordargumente für *f*
- Ergebnis: Funktion, die die verbleibenden Argumente und Keywordargumente für *f* nimmt und dann *f* mit sämtlichen Argumenten aufruft.

Beispiel

- `int` besitzt einen Keywordparameter `base=`, mit dem die Basis der Zahlendarstellung festgelegt wird.
- `int ("10011", base=2)` liefert 19
- Definiere `int2 = partial (int, base=2)`
- `assert int2 ("10011") == 19`

partial: Beispiel

```
def log(message, subsystem):
    """Write 'message' to the specified subsystem."""
    print(subsystem, ': ', message)
    ...

server_log = partial(log, subsystem='server')
server_log('Unable to open socket')
```

reduce: Reduktion eines iterierbaren Objekts auf ein Element

```
>>> from functools import reduce
```

- reduce wendet eine Funktion $\oplus$ mit zwei Argumenten auf ein iterierbares Objekt und einen Startwert an.
- Der Startwert fungiert als akkumulierender Parameter:
  - Bei jedem Iterationsschritt wird der Startwert durch (alter Startwert $\oplus$ nächster Iterationswert) ersetzt.
  - Am Ende ist der Startwert das Ergebnis.
- Falls kein Startwert angegeben, verwende das erste Element der Iteration.

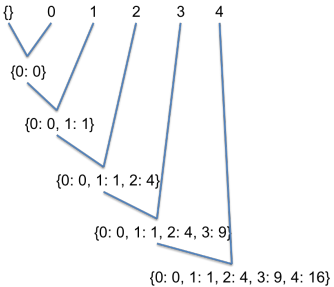
```
>>> from typing import Iterable
>>> reduce(lambda x, y: x * y, range(1, 5))
24
>>> def product(it: Iterable[float]) -> float:
...     return reduce (lambda x,y: x*y, it, 1)
...
```

Anwendung von reduce (1)

```
>>> def to_dict(d: dict[int,int], key:int) -> dict[int,int]:
...     d[key] = key**2
...     return d
...
>>> reduce (to_dict, range(5), {})
{0: 0, 1: 1, 2: 4, 3: 9, 4: 16}
```

Anwendung von `reduce` (2)

- Was genau wird da schrittweise reduziert?



Einschub: Der echte Reduktionsoperator ist parallel!

- Pythons `reduce` ist ein sogenannter **Fold Operator**.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function)`
- Das echte `reduce`$(\oplus, [x_0, \ldots, x_{m-1}])$ rechnet **parallel** und zwar so:
  - Arbeitet auf einem Array mit $m = 2^n$ Elementen.
  - Parameter ist assoziative Funktion $\oplus$.
  - Berechnet $r = ((x_0 \oplus x_1) \oplus x_2) \cdots \oplus x_{m-1}$.
- Anstatt r mit $\oplus$-Operationen in $m-1$ Schritten zu berechnen ...
- Beginne mit $x_0, x_2, \ldots, x_{m-2} \leftarrow (x_0 \oplus x_1), (x_2 \oplus x_3), \ldots, (x_{m-2} \oplus x_{m-1})$
- D.h. $m/2$ Operationen parallel in einem Schritt!
- Dann weiter so bis $x_0 \leftarrow (x_0 \oplus x_{m/2-1})$ das Ergebnis liefert.
- Falls m keine Zweierpotenz, werden fehlende Argumente durch die (Rechts-) Einheit von $\oplus$ ersetzt.

6 Dekoratoren

Was ist ein Dekorator?

Ein **Dekorator** ist eine Funktion, die eine andere Funktion erweitert, ohne diese selbst zu ändern.
Syntax von Dekoratoren (Funktion `decorator` angewendet auf `fun`):

```
@decorator
def fun():
    ...
```

Dekoratoren

Dekoratoren werden durch Funktionen, die Funktionen als Parameter nehmen und zurückgeben, implementiert.
Dekoratoren, die uns schon früher begegnet sind: `dataclass`, `property`, etc.
Falls der Dekorator `wrapper` definiert wurde, dann hat

```
@wrapper
def confused_cat(*args):
    pass # do some stuff
```

die gleiche Bedeutung wie

```
def confused_cat(*args):
    pass # do some stuff
confused_cat = wrapper(confused_cat)
```

Dekoratoren: `property`, `staticmethod` (1)

decorators.py

```
@dataclass
class C:
    _name : str

    def getname(self):
        return self._name

    # def setname(self, x):
    #     self._name = 2 * x
    name = property(getname)

    def hello():
        print("Hello world")
    hello = staticmethod(hello)
```

lässt sich mittels der @-Syntax schreiben ...

Dekoratoren: `property`, `staticmethod` (2)

```
@dataclass
class C:
    _name : str

    @property
    def name(self):
        return self._name

    # @name.setter
    # def name(self, x):
    #     self._name = 2 * x

    @staticmethod
    def hello():
        print("Hello world")
```

Definition eines Dekorators (1)

Aufgabe

Gib bei jedem Aufruf den Namen der Funktion mit ihren Argumenten aus.

```
verbose = True
def mult(x:float, y:float) -> float:
    if verbose:
        print("--- a nice header ---------")
        print("--> call mult with args: %s, %s" % x, y)
    res = x * y
    if verbose:
        print("--- a nice footer ---------")
    return res
```

Das ist hässlich! Wir wollen eine generische Lösung ...

Definition eines Dekorators (2)

Wiederverwendbare modulare Lösung

```
def decorator(f):
    def wrapper(*args, **kwargs):
        print("--- a nice header ---------")
        print("--> call %s with args: %s" %
              (f.__name__, ",".join(map(str, args))))
        res = f(*args, **kwargs)
        print("--- a nice footer ---------")
        return res
    # print("--> wrapper now defined")
    return wrapper

@decorator
def mult(x:float, y:float) -> float:
    return x * y
```

Definition eines Dekorators (3)

Aufgabe

Wie lange dauert die Ausführung eines Funktionsaufrufs?

```
import time

def timeit(f):
    def wrapper(*args, **kwargs):
        print("--> Start timer")
        t0 = time.time()
        res = f(*args, **kwargs)
        delta = time.time() - t0
        print("--> End timer:  %s sec." % delta)
        return res
    return wrapper
```

Definition eines Dekorators (4)

Dekoratoren hintereinander schalten

decorators.py

```
@decorator
@timeit
def sub(x:float, y:float) -> float:
    return x - y

print(sub(3, 5))
```

liefert z.B.:

decorators.py

```
--- a nice header ---------
--> call wrapper with args: 3,5
--> Start timer
--> End timer:  2.1457672119140625e-06 sec.
--- a nice footer ---------
-2
```

Dekoratoren: `docstring` und `__name__` (1)

- Beim Dekorieren gehen interne Attribute wie Name und `docstring` verloren.
- Ein guter Dekorator muss das wieder richtigstellen:

```
def decorator(f):
    def wrapper(*args, **kwargs):
        print("--- a nice header ---------")
        print("--> call %s with args: %s" %
              (f.__name__, ",".join(map(str, args))))
        res = f(*args, **kwargs)
        print("--- a nice footer ---------")
        return res
    wrapper.__name__ = f.__name__
    wrapper.__doc__ = f.__doc__
    return wrapper
```

Dekoratoren: `docstring` und `__name__` (2)

- Dieses Problem kann durch den Dekorator `functools.wraps` gelöst werden:

```
import functools
def decorator(f):
    @functools.wraps(f)
    def wrapper(*args, **kwargs):
        print("--- a nice header ---------")
        print("--> call %s with args: %s" %
              (f.__name__, ",".join(map(str, args))))
        res = f(*args, **kwargs)
        print("--- a nice footer ---------")
        return res
    return wrapper
```

Dekoratoren mit Parametern (1)

- Aufgabe: beschränke alle Stringergebnisse auf 5 Zeichen

```
>>> def trunc(f):
...     def wrapper(*args, **kwargs):
...         res = f(*args, **kwargs)
...         return res[:5]
...     return wrapper
...
>>> @trunc
... def data():
...     return 'foobar'
...
```

- Ein aktueller Aufruf:

```
>>> data()
'fooba'
```

Dekoratoren mit Parametern (2)

- Warum 5 Zeichen? Manchmal sollen es 3 sein, manchmal 6!

```
>>> def limit(length:int):
...     def decorator(f):
...         def wrapper(*args, **kwargs):
...             res = f(*args, **kwargs)
...             return res[:length]
...         return wrapper
...     return decorator
...
>>> @limit(3)
... def data_a():
...     return 'limit to 3'
...
>>> @limit(6)
... def data_b():
...     return 'limit to 6'
```

Parametrische Dekoratoren (3)

- Was passiert hier?
- Der Aufruf von `limit(3)` erzeugt einen Dekorator, der auf `data_a` angewandt wird; `limit(6)` wenden wir auf `data_b` an:

```
>>> data_a()
'lim'
>>> data_b()
'limit '
```

- Aber was passiert genau bei der geschachtelten Definition von Funktionen?

7 Funktionsschachtelung, Namensraum und Umgebung

Geschachtelte Funktionsdefinitionen

- Im letzten Abschnitt sind uns geschachtelte Funktionsdefinitionen begegnet.
- Nun stellt sich die Frage, auf welche Bindung sich die Verwendung einer Variablen bezieht.
- Dafür müssen wir die Begriffe Namensraum (Scope) und Umgebung verstehen.
- Dabei ergeben sich zum Teil interessante Konsequenzen für die Lebensdauer einer Variablen.

Namensraum

- Der Namensraum (Scope) ist ein statisches Konzept. Er zeigt an, in welchen Teilen eines Programms ein definierter Name sichtbar und verwendbar ist.
- Ein Name komt “in scope” durch
  - Definition einer Variable, Funktion oder Klasse
  - Import eines Moduls

  und ist verfügbar bis zum Ende des Blocks, in dem er definiert wurde.
- D.h. der lokale Namensraum einer Funktionsdefinition enthält die Parameter und lokale Variablen und reicht bis zum Ende des Funktionsrumpfes.

→ Namensräume sind wie Telefonvorwahlbereiche. Sie sorgen dafür, dass gleiche Namen in verschiedenen Bereichen nicht verwechselt werden.

- Auf gleiche Variablennamen in verschiedenen Namensräumen kann oft mit der Punkt-Notation zugegriffen werden (insbesondere bei Modulen).

Umgebungen

- Eine Umgebung ist ein dynamisches Konzept.
- Sie ist eine Abbildung von Namen auf Werte (intern oft durch ein `dict` realisiert).
  - `Built-in`-Umgebung (`__builtins__`) mit allen vordefinierten Variablen
  - Umgebung von Modulen, die importiert werden
  - globale Umgebung (des Moduls `__main__`)
  - lokale Umgebung innerhalb einer Funktion (vgl. Kellerrahmen)
    diese können geschachtelt sein.
- Die Umgebung ist ein dynamisches Konzept (d.h., zur Laufzeit).
- Die lokale Umgebung einer Funktion existiert normalerweise nur während ihres Aufrufs.

Sichtbarkeit

- Eine Variable heißt sichtbar in dem Teil eines Programms, in dem die Variable ohne die Punkt-Notation referenziert werden kann.
- Die Umgebungen bilden eine Hierarchie, wobei die innerste, lokale Umgebung normalerweise alle äußeren überdeckt!
- Wird ein Variablenname zum Lesen referenziert, so versucht Python der Reihe nach:
  - ihn in der lokalen Umgebungen aufzulösen;
  - ihn in den nicht-lokalen Umgebungen (die die lokale Umgebung umschließen) aufzulösen;
  - ihn in der globalen Umgebung aufzulösen;
  - ihn in der `Builtin`-Umgebung aufzulösen.
- Dabei heißt “auflösen” das Auffinden des Werts der Variable.

Zuweisungen

- Gibt es eine Zuweisung *var* `=` `...` im aktuellen Scope, so wird von einem lokalen Namen ausgegangen und Referenzen auf *var* dürfen erst nach Ausführung der Zuweisung erfolgen.
- Ausnahmen:
  - „`global` *var*“ bedeutet, dass *var* in der globalen Umgebung gesucht werden soll. Auch Zuweisungen an *var* wirken auf die globale Umgebung.
  - „`nonlocal` *var*“ bedeutet, dass *var* in einer nicht-lokalen Umgebung gesucht werden soll, d.h. in den umgebenden Funktionsdefinitionen. Auch Zuweisungen wirken dort.
- Kann ein Name nicht aufgelöst werden, dann gibt es eine Fehlermeldung.

Ein Beispiel für Namensräume (1)

```
def scope_test():
    def do_local():
        spam = "local spam"
    def do_nonlocal():
        nonlocal spam
        spam = "nonlocal spam"
    def do_global():
        global spam
        spam = "global spam"
    spam = "test spam"
    do_local()
    print("After local assignment:", spam)
    do_nonlocal()
    print("After nonlocal assignment:", spam)
    do_global()
    print("After global assignment:", spam)
```

Ein Beispiel für Namensräume (2)

Python-Interpreter

```
>>> scope_test()
After local assignment: test spam
After nonlocal assignment: nonlocal spam
After global assignment: nonlocal spam
>>> print("In global scope:", spam)
In global scope: global spam
```

8 Closures

Closures in Python

- Eine Closure ist eine von einer anderen Funktion zurückgegebene lokale Funktion, die freie Variable (nicht-lokale Referenzen) enthält:

```
>>> def add_x(x:float) -> Callable[[float], float]:
...     def adder(num:float) ->float:
...         return x + num
...     # adder is a closure
...     # x is a free variable of adder
...     return adder
...
>>> add_5 = add_x(5); add_5
<function add_x.<locals>.adder at 0x10e671990>
>>> add_5(10)
15
```

Closures in Python (2)

- Dasselbe mit einer `lambda` Abstraktion:

```
>>> def add_x(x:float) -> Callable[[float], float]:
...     return lambda num: x + num
...     # returns a closure
...     # num is a bound variable,
...     # x is a free variable of the lambda
...
>>> add_6 = add_x(6); add_6
<function add_x.<locals>.<lambda> at 0x10e6716c0>
>>> add_6(10)
16
```

Closures in Python (3)

- Achtung bei der Interaktion von Closures mit Zuweisungen:

```
>>> def clo() -> Callable[[], int]:
...     x = 0
...     f = lambda : x
...     x = x + 1
...     return f
...
>>> fx = clo()
>>> fx()
1
```

- Nachfolgende Zuweisungen ändern den Wert in der Closure...

Zusammenfassung Closures

- Definition: Eine Variable tritt frei in einem Funktionsrumpf auf, wenn sie zwar vorkommt, aber weder in der Parameterliste noch in einer lokalen Zuweisung gesetzt wird.
- Jede Funktion mit freien Variablen wird durch eine *Closure* repräsentiert.
- Innerhalb einer Closure kann mit Hilfe der Anweisungen `nonlocal` oder `global` auf freie Variable schreibend zugegriffen werden.
- In den beiden letzteren Fällen verlängert sich die Lebensdauer einer Umgebung (nämlich des umschliessenden Funktionsaufrufs)! Sie bleibt so lange erhalten wie die Closure zugreifbar ist!