ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Peter Thiemann
Manuel Geffken

05.02.2016
Abgabe bis spätestens Freitag 12.02.2016, 10 Uhr
in die Briefkästen in Gebäude 51

12. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Dieses Blatt ist das letzte Übungsblatt und ist für die Zulassung relevant. Es findet kein Tutorat statt, in dem die Lösung für dieses Blatt besprochen wird. Daher wird für dieses Blatt nach dem 12. Februar eine Musterlösung auf der Webseite veröffentlicht. Ihre Korrektur können Sie sich ab dem 19. Februar am Lehrstuhl für Programmiersprachen (Gebäude 079, Obergeschoss) abholen. Alternativ können Sie mit Ihrem Tutor eine Abgabe per Email vereinbaren.

Hinweis: Wo Sie in den folgenden Aufgaben die Berechenbarkeit von Funktionen zeigen oder eine Laufzeitabschätzung angeben müssen, genügt jeweils eine intuitive Begründung. Sie müssen weder Turingmaschinen noch Pseudocode explizit angeben.

Aufgabe 1: Reduktion I 3 Punkte

Welche der folgenden Aussagen gelten? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(a) $\textsc{Sat} \preceq \mathrm{H}$

(b) $\mathrm{H} \preceq \textsc{Sat}$

(c) $\textsc{Sat} \preceq_p \mathrm{H}$

(d) $\mathrm{H} \preceq_p \textsc{Sat}$

Dabei ist H das allgemeine Halteproblem für Turingmaschinen und Sat das Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Ausdrücke in konjunktiver Normalform.

Aufgabe 2: Reduktion II 3 Punkte

Das NP-vollständige Hamiltonpfadproblem HPath lautet wie folgt:

Gegeben: ein ungerichteter Graph G.
Frage: Gibt es einen Pfad in G, der jeden Knoten genau einmal besucht?

Das Hamiltonpfadproblem für gerichtete Graphen DHPath ist analog definiert, aber zusätzlich darf jede Kante nur in Richtung von ihrem Ausgangs- zu ihrem Zielknoten verwendet werden.

Zeigen Sie: $\textsc{HPath} \preceq_p \textsc{DHPath}$.

Aufgabe 3: NP-Vollständigkeit I 6 Punkte

Das NP-vollständige Problem 3Sat, eine Variante des Sat-Problems, ist wie folgt definiert:

> *Gegeben:* eine aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform, bei der jede Klausel höchstens drei Literale enthält.
>
> *Frage:* Ist F erfüllbar?

Das Problem MSat ist wie folgt definiert:

> *Gegeben:* eine aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform.
>
> *Frage:* Existiert eine Belegung der Variablen von F, sodass in jeder Klausel strikt mehr als die Hälfte der Literale wahr wird?

Zeigen Sie: MSat ist NP-vollständig.

Aufgabe 4: NP-Vollständigkeit II 4 Bonuspunkte

Das Problem HSet (Hitting-Set) ist wie folgt definiert:

> *Gegeben:* eine Menge M und eine endl. Menge von Teilmengen $\mathcal{S}$ (d.h. $\mathcal{S} := \{S_1, \ldots, S_n\}$; $\forall i \in \{1, \ldots, n\}.\ S_i \subseteq M$) sowie eine natürliche Zahl $k \leq n$.
>
> *Frage:* Gibt es eine Teilmenge $T \subseteq M$ mit $|T| \leq k$ und $\forall i \in \{1, \ldots, n\}.\ T \cap S_i \neq \emptyset$?

Das NP-vollständige Problem VC (Knotenüberdeckung; auch Vertex Cover) ist wie folgt definiert:

> *Gegeben:* ein ungerichteter Graph $G := (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |E|$.
>
> *Frage:* Besitzt G eine überdeckende Knotenmenge der Größe höchstens k? Eine überdeckende Knotenmenge ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$, sodass für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt: $u \in V'$ oder $v \in V'$.

(a) Begründen Sie, dass HSet in NP liegt.

(b) Beweisen Sie, dass HSet NP-schwer ist.