Informatik 3
Theoretische Informatik
WS 2015/16

Prof. Dr. Peter Thiemann
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik

Name: ________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

- **Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Blatt**.
- Es sind **keine Hilfsmittel** wie Skripte, Bücher, Notizen oder Taschenrechner erlaubt. Desweiteren sind alle elektronischen Geräte (wie z.B. Handys) auszuschalten.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie **90 Minuten** Zeit.
- Benutzen Sie zur Bearbeitung der Aufgaben jeweils den Platz unterhalb der Aufgaben sowie ggf. den Platz auf der Rückseite.
- Falls Sie mehrere Lösungsansätze einer Aufgabe erarbeiten, markieren Sie deutlich, welcher gewertet werden soll.

	Erreichbare Punkte	**Erzielte Punkte**	**Nicht bearbeitet**
Kurzfragen	28		
Aufgabe 1	15		
Aufgabe 2	15		
Aufgabe 3	15		
Aufgabe 4	15		
Aufgabe 5	15		
Gesamt	103		

Kurzfragen. (insgesamt 28 Punkte)

Der erste Teil der Klausur besteht aus 8 Kurzfragen. **Geben Sie für alle "Richtig oder falsch?"-Fragen eine kurze Begründung an**, z.B. Verweise auf Sätze aus der Vorlesung, Zustandsdiagramme von Automaten, Beweisidee oder Angabe eines Gegenbeispiels.

(F1) Geben Sie die Definition der Konkatenation $(\cdot)$ auf Sprachen an.

$L_1 \cdot L_2 =$

Wie ist die Potenz L^n einer Sprache L definiert?

4 P.	

(F2) *Richtig oder falsch?*

Sind L_1, L_2 und L_3 Sprachen über dem Alphabet Σ, so ist auch $(L_1)^2 \cup (L_1 \cdot (L_2 \cap L_3)) \cup \{\varepsilon\}$ eine Sprache über dem Alphabet Σ.

3 P.	

(F3) Wie ist die Rechenschrittrelation $\vdash$ einer Turingmaschine definiert?

Wie ist die Relation $\vdash^*$ definiert?

6 P.	

(F4) Wie ist die Funktion $out : \Gamma^* \to \Sigma^*$ definiert, welche die Ausgabe aus der rechten Bandhälfte einer Turingmaschine extrahiert?

3 P.	

Zusätzlicher Platz für Kurzfragen:

(F5) Wie lautet die Definition der von einer Turingmaschine erkannten Sprache?

Wie lautet die Definition der von einer Turingmaschine berechneten Funktion?

4 P.	

(F6) *Richtig oder falsch?*

Jede Funktion, die von einer k-Band-Turingmaschine berechnet werden kann, kann auch von einer Standard-Turingmaschine berechnet werden.

2 P.	

(F7) *Richtig oder falsch?*

Jedes RM-Programm kann durch ein RM-Programm simuliert werden, das nur 3 Register benutzt.

2 P.	

(F8) *Richtig oder falsch?*

Turingmaschinen mit genau einem akzeptierenden Zustand, d.h. für die gilt $|F| = 1$, können dieselben Sprachen erkennen, wie laut Vorlesung definierte Turingmaschinen, d.h. solche, die mehrere akzeptierende Zustände erlauben.

4 P.	

Zusätzlicher Platz für Kurzfragen:

Aufgabe 1 (15 Punkte).

(a) Seien Σ ein Alphabet; U, W, L Sprachen über Σ.
Der Rechtsquotient von U und W ist

$$U/W := \{v \in \Sigma^* \mid \exists w \in W.\, vw \in U\}.$$

Die Menge der Präfixe von L ist

$$\mathrm{pref}(L) := \{v \in \Sigma^* \mid \exists w \in \Sigma^*.\, vw \in L\}.$$

Die Menge der Suffixe von L ist

$$\mathrm{suff}(L) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*.\, vw \in L\}.$$

Können Sie pref mithilfe des Rechtsquotienten / ausdrücken?
Begründen Sie Ihre Antwort.

1 P.	

Können Sie suff mithilfe der Funktion pref und des Rückwärtsoperators $\cdot^R : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ausdrücken?
Begründen Sie Ihre Antwort.

4 P.	

(b) Sei Σ ein Alphabet. Die Menge P^n der Palindrome der Länge n über Σ ist wie folgt induktiv definiert:

$$\begin{aligned} P^0 &:= \{\varepsilon\} \\ P^1 &:= \{a \mid a \in \Sigma\} \\ P^{n+2} &:= \{a \cdot w \cdot a \mid a \in \Sigma, w \in P^n\} \end{aligned}$$

Die Menge aller Palindrome P ist dann $\bigcup_{n \geq 0} P^n$.

Sei $\#_a(w)$ die Anzahl der as in einem Wort w ($a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$). Beweisen Sie: Für jedes Palindrom $p \in P$ *ungerader* Länge existiert ein $a \in \Sigma$, so dass $\#_a(p)$ *ungerade*.

10 P.	

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (15 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \llcorner\!\lrcorner, F)$ eine Turing-Maschine mit

$$\begin{aligned} Q &:= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \\ \Sigma &:= \{|\}, \\ \Gamma &:= \Sigma \cup \{\llcorner\!\lrcorner\}, \\ F &:= \{q_2\} \end{aligned}$$

und δ definiert gemäß folgender Tabelle:

q_0	$\vert$	q_1	$\vert$	R
q_0	$\llcorner\!\lrcorner$	q_3	$\llcorner\!\lrcorner$	N
q_1	$\vert$	q_2	$\vert$	R
q_1	$\llcorner\!\lrcorner$	q_3	$\llcorner\!\lrcorner$	N
q_2	$\vert$	q_2	$\vert$	N
q_2	$\llcorner\!\lrcorner$	q_2	$\llcorner\!\lrcorner$	N
q_3	$\vert$	q_3	$\vert$	R
q_3	$\llcorner\!\lrcorner$	q_3	$\llcorner\!\lrcorner$	R

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Rechenschrittrelation $\vdash$, dass $\mathcal{A}$ für mindestens eine Eingabe hält.

4 P.	

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Rechenschrittrelation $\vdash$, dass $\mathcal{A}$ für mindestens eine Eingabe *nicht* hält.

4 P.	

(c) Geben Sie die von $\mathcal{A}$ erkannte Sprache $L(\mathcal{A})$ an. Begründen Sie Ihre Lösung.

7 P.	

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (15 Punkte).

Konstruieren Sie folgende Turingmaschinen:

(a) $\mathcal{A}_\star$, sodass die von $\mathcal{A}_\star$ berechnete Funktion $f_{\mathcal{A}_\star}$ die Multiplikation mit der Konstanten 4 auf den natürlichen Zahlen in Binärdarstellung ist. Geben Sie die Transitionsfunktion δ als Tabelle an. Markieren Sie dabei den Startzustand.

Verwenden Sie das Alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$. In der Binärdarstellung steht die am wenigsten signifikante Stelle rechts. Jedes Wort in der Sprache $\{0\}^*$ ist eine gültige Kodierung der Zahl 0.

Geben Sie Beispiele für die Anwendung der von $\mathcal{A}_\star$ berechneten Funktion $f_{\mathcal{A}_\star}$:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{A}_\star}(0) &= ? \\ f_{\mathcal{A}_\star}(00) &= ? \\ f_{\mathcal{A}_\star}(101) &= ? \end{aligned}$$

8,5 P.	

(b) $\mathcal{A}_\sim$, sodass die von $\mathcal{A}_\sim$ berechnete Funktion $f_{\mathcal{A}_\sim}$ die bitweise Negation auf den natürlichen Zahlen $[0, 255]$ in 8-Bit Binärdarstellung ist. Geben Sie die Transitionsfunktion δ als Tabelle an. Markieren Sie dabei den Startzustand.

Geben Sie Beispiele für die Anwendung der von $\mathcal{A}_\sim$ berechneten Funktion $f_{\mathcal{A}_\sim}$:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{A}_\sim}(00000000) &= ? \\ f_{\mathcal{A}_\sim}(00000001) &= ? \\ f_{\mathcal{A}_\sim}(00000110) &= ? \end{aligned}$$

6,5 P.	

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (15 Punkte)**.**

Konstruieren Sie eine Einband-Turingmaschine

$$\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{␣}, F \rangle \,,$$

die die folgende Sprache L akzeptiert:

$$L = \{\, a^n b^{2n} \;:\; n \in \mathbb{N} \}$$

(a) Spezifizieren Sie dazu Q, Σ, Γ,F in mengentheoretischer Schreibweise und geben Sie die Transitionsfunktion δ als Tabelle an.

12 P.	

(b) Erläutern Sie die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine.

3 P.	

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (15 Punkte)**.**

Konstruieren Sie folgende Registermaschinen-Programme:

(a) `set` mit

$$f_{\texttt{set(1)}}(x) = (1)$$

4 P.	

(b) `add` mit

$$f_{\texttt{add(1,2)}}(n, m) \quad = \quad (n + m)$$

4 P.	

(c) `diff` mit

$$f_{\texttt{diff(1,2)}}(n, m) \quad = \quad (|n - m|)$$

7 P.	

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 5: