Informatik 3
Theoretische Informatik
WS 2016/17

Prof. Dr. Peter Thiemann
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik

Name: ________________________

Übungsgruppe: ________________________

- **Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppennummer auf jedes Blatt**.
- **Verwenden Sie ein Schreibgerät mit dokumentenechter schwarzer oder blauer Schrift (in der Regel Kugelschreiber). Kein Bleistift!**
- Es sind **keine Hilfsmittel** wie Skripte, Bücher, Notizen oder Taschenrechner erlaubt. Alle elektronischen Geräte (wie z.B. Handys) sind auszuschalten.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie **90 Minuten** Zeit.
- Benutzen Sie zur Bearbeitung der Aufgaben jeweils den Platz unterhalb der Aufgaben sowie ggf. den Platz auf der Rückseite. Weiteres Papier erhalten Sie von der Aufsicht.
- Falls Sie mehrere Lösungsansätze einer Aufgabe erarbeiten, markieren Sie deutlich, welcher gewertet werden soll.

	Erreichbare Punkte	**Erzielte Punkte**
Kurzfragen	6	
Aufgabe 1	7	
Aufgabe 2	7	
Aufgabe 3	7	
Aufgabe 4	7	
Aufgabe 5	7	
Aufgabe 6	7	
Gesamt	48	

Kurzfragen. (1+2+1+1+1 Punkte)

Der erste Teil der Klausur besteht aus Kurzfragen nach Definitionen.

(F1) Sei $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ eine Grammatik. Wann ist $\mathcal{G}$ eine Typ-1 Grammatik?

(F2) Sei $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Wann ist $\mathcal{G}$ in Chomsky-Normalform?

(F3) Definieren Sie die Menge der Ableitungsbäume einer kontextfreien Grammatik $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$

(F4) Geben Sie an, wann ein DPDA $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, S, \delta, F)$ ein Wort $w \in \Sigma^*$ akzeptiert.

(F5) Wie ist die Größe $|\mathcal{G}|$ einer CFG $\mathcal{G}$ definiert.

Zusätzlicher Platz für Kurzfragen:

Aufgabe 1 (First). (7 Punkte)

Betrachten Sie folgende Grammatik $\mathcal{G} = (\{S, T, F, G\}, \{\mathtt{x}, -\}, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{ & S \longrightarrow TF, \\ & T \longrightarrow GS, \quad T \longrightarrow \varepsilon \\ & F \longrightarrow \mathtt{x}, \\ & G \longrightarrow -, \quad G \longrightarrow \varepsilon \} \end{aligned}$$

Wenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung an, um die Mengen *first*(A) für $A \in N$ zu berechnen. Geben Sie dabei für jede Iteration den Inhalt des Felds FI an.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (Pumping-Lemma für CFL). (5+2 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{1, 2, 3\}$:

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_1(w) \leq \min(\#_2(w), \#_3(w))\}$$
$$L_2 = \{1\}^*\{2\}^*\{3\}^*$$

Dabei berechnen die Funktionen $\#_n(w)$ jeweils die Anzahl der Vorkommen von n in w.

(a) Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass $L = L_1 \cap L_2$ nicht kontextfrei ist.

(b) Ist L_1 kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (Kontextfreie Grammatiken). (1 + 2 + 4 Punkte)

Betrachten Sie folgende Sprache L über $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \forall u \in \mathrm{Suf}(w) : \#_{\mathtt{a}}(u) \geq \#_{\mathtt{b}}(u)\}$$

Dabei berechnet $\#_\sigma(w)$ die Anzahl der Vorkommen von $\sigma \in \Sigma$ in $w \in \Sigma^*$. $\mathrm{Suf}(w)$ ist die Menge der Suffixe von $w \in \Sigma^*$:

$$\mathrm{Suf}(w) = \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^* : w = uv\}$$

(a) Geben Sie fünf Worte von L an.

(b) Begründen Sie, dass für alle $w_1 \in L$ und $w_2 \in L$ gilt, dass $w_1 w_2 \in L$.

(c) Betrachten Sie ferner die kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} = (\{S\}, \Sigma, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{ & S \longrightarrow S\mathtt{a}, \\ & S \longrightarrow \mathtt{b}S\mathtt{a}, \\ & S \longrightarrow SS, \\ & S \longrightarrow \varepsilon, \} \end{aligned}$$

i. Ist $\mathcal{G}$ eindeutig? Beweisen Sie Ihre Antwort.

ii. Zeigen Sie, dass $L(\mathcal{G}) \subseteq L$ per Induktion über die Ableitungsbäume $\mathcal{A} \in \mathrm{Abl}(\mathcal{G}, S)$.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (Kellerautomaten). (4 + 3 Punkte)

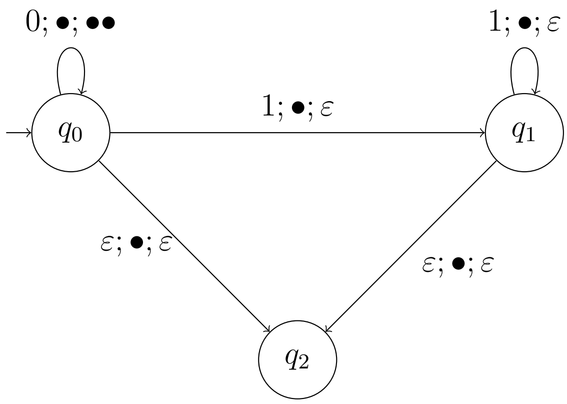
(a) Betrachten Sie die Grammatik $\mathcal{G} = (\{S, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{S &\longrightarrow \mathtt{a}S\mathtt{a}, \\ S &\longrightarrow B, \\ B &\longrightarrow \mathtt{b}B\mathtt{b}, \\ B &\longrightarrow \varepsilon\} \end{aligned}$$

i. Geben Sie eine knappe, aber präzise Beschreibung der Sprache $L(\mathcal{G})$ an.

ii. Benutzen Sie das Verfahren aus der Vorlesung um einen NPDA zu konstruieren, der $L(\mathcal{G})$ erkennt. Geben Sie die Komponenten des NPDA an (*kein* Zustandsdiagramm!).

(b) Betrachten Sie folgenden NPDA M über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und dem Kelleralphabet $\Gamma = \{\bullet\}$. (Das Kellerbodensymbol ist natürlich $\bullet$).



i. Welche Sprache wird von M erkannt? Geben Sie eine knappe, aber präzise Definition an.

ii. Ergänzen Sie die nötigen Transitionen, so dass ein PDA M' entsteht, der die Sprache

$$L' = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^m \mid 0 \le n \le m\}$$

erkennt.

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (Ablschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen). (3+4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die kontextfreien Sprachen unter der Operation $\cdot^R$ („reverse") abgeschlossen sind, indem Sie

(a) für eine gegebene CFG $\mathcal{G}$, eine CFG $\mathcal{G}'$ konstruieren, die $L(\mathcal{G})^R$ produziert und

(b) beweisen, dass $L(\mathcal{G})^R = L(\mathcal{G}')$ gilt. Hinweis: es gilt $(L^R)^R = L$.

Zur Erinnerung, die Definition von L^R:

$$
\begin{aligned}
L^R &= \{w^R \mid w \in L\} \\
\varepsilon^R &= \varepsilon \\
(aw)^R &= w^R a
\end{aligned}
$$

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (CYK). (7 Punkte)

Betrachten Sie folgende Grammatik $\mathcal{G} = (\{S, M, N\}, \{-, 1\}, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{ & S \longrightarrow NS, \\ & S \longrightarrow MN, \\ & M \longrightarrow -, \\ & N \longrightarrow 1, \\ & N \longrightarrow MN, \} \end{aligned}$$

Prüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus ob $w = - - 1 - 1 \in L(\mathcal{G})$. Benutzen Sie diese Tabellenvorlage:

$-$	$-$	1	$-$	1
M				
	M			
		N		
			M	
				N

Zusätzlicher Platz für Aufgabe 6: