R. Hinze, S. Franck Sommer Semester 2005

Software Engineering

`http://proglang.informatik.uni-freiburg.de/teaching/swt/2005/`

Übungsblatt 7

Abgabe: 7. Juni 2005

Aufgabe 1 – Bäume in Z: (2 Punkte)
Die folgende Typdefinition modelliert Binärbäume.

$$BINTREE ::= Leaf \mid Node\langle\!\langle \mathbb{Z} \times BINTREE \times BINTREE \rangle\!\rangle$$

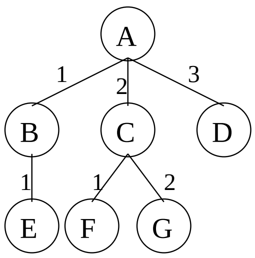
Geben Sie ein Schema für Heaps an, d.h. für Binärbäume, bei denen der Wert eines Knotens immer größer oder gleich ist wie der Werte jedes Nachfolgers dieses Knotens.

Aufgabe 2 – Bäume in Z (Teil II): (6 Punkte)
Eine andere Art, Bäume zu beschreiben ist analog zur Definition von Sequenzen in Z (die Zahlen auf Werte abbilden): Bäume kann man als Funktion von Sequenzen auf Knoten sehen, wobei die Sequenz den Pfad von der Wurzel zum entsprechenden Knoten beschreibt.
Somit können Bäume wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\text{tree } X = \{t : \text{seq}\,\mathbb{N} \mathrel{\twoheadrightarrow\mkern-14mu\shortmid\mkern8mu} X \mid{} & \langle\rangle \in \mathsf{dom}\ t \wedge \\ & \forall\, \pi \frown \sigma \in \mathsf{dom}\ t \Rightarrow \pi \in \mathsf{dom}\ t \wedge \\ & \forall\, \pi \frown \langle n \rangle \in \mathsf{dom}\ t \Rightarrow \forall\, i < n \bullet \pi \frown \langle i \rangle \in \mathsf{dom}\ t\}\end{aligned}$$

Dabei bildet t eine Sequenz von Zahlen auf Knoten (Elemente von X) ab. Die Zahlen repräsentieren den Pfad von der Wurzel zu den Knoten indem sie angeben, zu welchem Sohn des aktuellen Knotens gewechselt wird. Eine Sequenz $\langle 1, 2 \rangle$ beschreibt z.B. den Knoten, der der zweite Sohn des ersten Sohns der Wurzel ist. Mit jeder Zahl in der Sequenz steigt man eine Ebene im Baum ab.
Die leere Sequenz wird auf die Wurzel des Baums abgebildet.

Falls wir einen Baum *bsp*



haben, dann gilt:

$$\begin{aligned} bsp(\langle\rangle) &= A \\ bsp(\langle 1 \rangle) &= B \\ bsp(\langle 2, 1 \rangle) &= F \\ bsp(\langle 3, 1 \rangle) &= \text{undefined} \end{aligned}$$

Definieren Sie die folgenden Funktionen:

1. content, die eine Menge aller Knoten des Baumes zurückgibt.
   Beispiel:
   $$content(bsp) = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

2. subtree, die einen Teilbaum an einer durch eine Sequenz von Zahlen bestimmten Stelle des Baumes zurückgibt.
   Beispiel:
   $$subtree(bsp, \langle 1 \rangle) = \{(\langle\rangle, B), (\langle 1 \rangle, E)\}$$

3. appendtree, die einen Baum an einer bestimmten Stelle einfügt.
   Beispiel:
   $$appendtree(bsp, \{(\langle\rangle, H)\}, \langle 2 \rangle) = bsp \cup \{(\langle 2, 3 \rangle, H)\}$$
   (unter C wurde ein Baum, der nur H enthält, eingefügt)

4. prune, die einen Teilbaum von einer bestimmten Stelle entfernt. Dabei soll der von der Übergabesequenz erreichte Knoten auch entfernt werden.
   Beispiel:
   $$prune(bsp, \langle 2 \rangle) = \{(\langle\rangle, A), (\langle 1 \rangle, B), (\langle 2 \rangle, D), (\langle 1, 1 \rangle, E)\}$$
   prune kann nicht mit der leeren Sequenz aufgerufen werden (jeder Baum muss laut Definition eine Wurzel haben).

Aufgabe 3 – Refinement Relation: (2 Punkte)
Die folgenden zwei Schemata sind gegeben:

$$\begin{array}{|l}
\hline
\textit{Abigail} \\
x : \mathbb{N} \\
x' : \mathbb{N} \\
\hline
x' \geq x \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
\hline
\textit{Baldwin} \\
x : \mathbb{N} \\
x' : \mathbb{N} \\
\hline
x' = 2 \cdot x \\
\hline
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass $Baldwin \sqsupseteq Abigail$ gilt.